複素構造の変形と周期

共形場理論への応用

上野健爾・清水勇二

岩波書店

まえがき

本書の意味でのモジュライ(module の複数形 moduli, ドイツ語では Moduln)という言葉は 1857 年に出版された Riemann の Abel 函数論に関する画期的な論文 “Theorie der Abel'schen Funktionen” のなかで初めて登場した. Riemann は 1 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^1$ の分岐被覆として代数函数体の Riemann 面を定義し, 種数 $g \geqq 2$ の Riemann 面は $3g-3$ 個のパラメータをもつことを見いだし, ここにモジュライの理論が誕生した.

しかし, その後は主として Riemann 面を代数曲線として捉える見方が主流となり, 方程式で定義された図形のもつパラメータとしてモジュライが捉えられた. こうした素朴な観点から出発し, 現在では高度に発達した代数幾何学的な観点からのモジュライの理論は[67]で取り扱われている.

1913 年 H. Weyl は Riemann 面を 1 次元複素多様体として定義した. さらに 1930 年代後半から 1940 年代前半の Teichmüller による擬等角写像と Teichmüller 空間の理論によってモジュライ理論の新しい進展が始まった. Teichmüller の理論では Riemann 面 R 上の 2 次微分, 今日の言葉を使えば $H^0(R, \Omega_R^{1\,\otimes 2})$ の元が重要な役割をする. Teichmüller の理論によって Riemann 面のモジュライ理論の複素解析幾何学的なアプローチが可能になった. この理論はその後, Ahlfors, Bers, Rauch らによって完全なものとなった. しかしながら, Teichmüller 空間の理論は複素 1 次元空間の特殊性を使っており, 一般次元にそのままの形で拡張することは困難であった.

一般次元へのアプローチを可能にしたのは小平–Spencer による複素多様体の変形理論である. 小平–Spencer 理論は複素構造の無限小 1 次変形が, ベクトル場の芽の層がなす 1 次元コホモロジー群 $H^1(M, \Theta_M)$ の元で記述できることを示し, 複素多様体の変形の族の 1 次近似を記述する小平–Spencer 写像を定義した. Serre の双対定理によれば閉 Riemann 面 R では $H^0(R, \Omega_R^{1\,\otimes 2})$ は $H^1(M, \Theta_M)$ の双対空間である. このことが Teichmüller の議論で 2 次微分が登場した事情を説明してくれる.

複素多様体の族を考察するということ自体が数学に新しい観点を導入し，また，変形理論は様々な構造の変形を考える端緒ともなり，複素解析幾何学や代数幾何学のみならず，数学の種々の分野の進展に大きな影響を与えた．複素解析幾何学に限っても，小平–Spencer 理論から大きな影響を受けて，連接層のコホモロジー理論が進展し，連接層の固有写像による高次順像が連接層であるという，固有写像定理が Grauert によって証明された．

ところで，小平–Spencer の議論の始まりは，モジュライ数(モジュライ空間の次元，すなわち考察している図形のもつパラメータの数)の意味をはっきりさせることにあった．小平–Spencer は多くの複素多様体でモジュライ数が $\dim_{\mathbb{C}} H^1(M,\Theta_M)$ に一致することを示し，さらに $H^2(M,\Theta_M)=0$ であれば，M に近い複素構造をもつ複素多様体が次元 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(M,\Theta_M)$ の複素多様体上に族をなすことを示し，モジュライ数の意味づけを与えた．この結果は倉西によって一般化され，倉西族の存在が証明され，モジュライ理論との関係も明らかになった．

こうした事情により，本書では，まず第1章で小平–Spencer 理論をその本来の素朴な形で示し，複素解析幾何学の観点からのモジュライ理論への入門を試みる．第2章ではモジュライ理論の典型である Torelli の定理を目標にして，閉 Riemann 面の周期写像と Jacobi 多様体の理論の概要を述べる．閉 Riemann 面の周期写像の理論は Kähler 多様体の Hodge 構造の理論を使った周期写像の理論へと一般化できる．第3章では周期写像の観点から Hodge 理論の概要を述べる．第4章ではモジュライ理論の応用の一つとして，共形場理論を述べる．紙数の関係もあり，多くの証明を省かざるを得なかった．読者は巻末に挙げられた文献をもとにして証明を補っていただきたい．

1999年5月

上野健爾・清水勇二

追記

本書は岩波講座『現代数学の展開』の1分冊「モジュライ理論3」を単行本にしたものである．それにあたって誤植を訂正し，最近の動向を補った．

2008年7月

理論の概要と展望

すでに「まえがき」で述べたように，複素解析幾何学的な観点からのモジュライ理論は小平–Spencer による変形理論によって新たなる進展が始まった．第1章では複素構造の変形理論をできるだけ素朴な形で述べる．複素多様体は座標近傍の張り合わせで得られると考えると，複素構造の変形は座標近傍の張り合わせ方の変形と考えられ，次のように説明することができる．

複素多様体 M は，M の底空間である位相空間 X とその開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ および各 U_λ から $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍への同相写像 φ_λ からなる．このとき，同相写像 φ_λ によって U_λ 上に局所座標 $z_\lambda^1, \cdots, z_\lambda^n$ が導入され $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ のとき $\varphi_\lambda \circ \varphi_\mu^{-1}$ は正則写像である．これは $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の正則函数(正確には $\varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu)$ 上の正則函数と考えるべきであるが以下このように略記する) $g_{\lambda\mu}^i$ を使い

$$z_\lambda^i = g_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

と書き記すことができる．さらに $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \varnothing$ のとき常に

(1) $$g_{\lambda\nu}^i(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n) = g_{\lambda\mu}^i(g_{\mu\nu}^1(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n), \cdots, g_{\mu\nu}^n(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n))$$

が成立していなければならない．逆に以上の条件が満たされれば位相空間 X 上に複素多様体の構造を導入することができる．

もし $\mathbb{C}$ の原点での開近傍 W を選んで($\mathbb{C}$ の座標を t と記す) $(U_\lambda \cap U_\mu) \times W$ 上の正則函数 $h_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n, t)$ が $h_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n, 0) = g_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n)$ を満足し，かつ上と同様に張り合わせの条件(1)が $\{h_{\lambda\mu}^i\}$ に関して成立すれば，$X \times W$ に複素多様体の構造 $\mathcal{V}$ を導入することができ，$X \times W$ から W への自然な射影は正則写像 $p\colon \mathcal{V} \to W$ を定義する．このようにして $p^{-1}(0) = M$ となる複素解析族が存在することが分かる．このとき $h_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n, t)$ の t に関する1次近似(t に関する Taylor 展開の1次の項)をとって

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} h_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n, 0) \frac{\partial}{\partial z_\lambda^i}$$

を作ると，正則ベクトル場の芽のなす層に値をとる Čech のコホモロジー $H^1(M,\Theta_M)$ の元を定め，複素解析族の 1 次近似と考えることができることを小平–Spencer は見いだした．これによって変形理論がコホモロジーを使って記述できるようになった．さらに $H^1(M,\Theta_M)$ を Dolbeault コホモロジー $H^{0,1}_{\bar\partial}(M,\Theta)$ を使って表現すれば，M の近くの複素構造は上記の張り合わせのかわりに，たとえば複素 1 次元の場合は Beltrami の微分方程式

$$f_{\bar z}=\mu(z)f_z$$

の解を各座標近傍で考えることで与えられる．このようにして，Teichmüller 空間の理論で Beltrami の微分方程式が出てきた理由が明らかになる．また，2 次元以上の場合は複素構造を与える Beltrami の微分方程式の一般化したものが解をもつためには可積分条件が必要となる．

第 1 章では以上の議論をさらに深めることによってコンパクト複素多様体 M の"近く"にある複素多様体を記述する言葉を用意し，変形理論の基本を述べる．コンパクト複素多様体 M の"近く"にある複素多様体をすべて網羅した最小の複素解析族 $\varphi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ が M の倉西族である．倉西族が分かれば M のモジュライ空間の局所的な構造がある程度分かることになる．実際には，M が解析的自己同型をもつ場合には，倉西族の底空間 $\mathcal{W}$（倉西空間という）の M に対応する点のまわりに同型な複素多様体が複数現れて，倉西空間をモジュライ空間の一部と見ることはできないことが分かる．この場合は，倉西空間を複素多様体として同型である点を同一視する同値関係で割ってモジュライ空間を構成しなければならない．しかしながら，この商空間は複素トーラスの例が示すようによい構造をもつとは限らない．

第 2 章では，まず複素トーラスを考察し，複素トーラスの倉西族は大域的に構成できるが，2 次元以上の複素トーラスに対しては，倉西空間の商空間としての"モジュライ空間"は Hausdorff 空間ではなく，したがって複素解析空間の構造をもたないことを示す．複素トーラスは代数多様体の構造をもつとき Abel 多様体と呼ばれる．Abel 多様体のよいモジュライ空間を得るためには，Abel 多様体にその上の豊富な直線束を付け加えた組 (A,L) を考える必要がある．この組の同型類を偏極構造といい，偏極構造が一定の Abel

多様体のモジュライ空間は Siegel 上半空間をパラモジュラー群で割った複素解析空間として実現できることを示す.

ところで，閉 Riemann 面 R に関しては正則 1 次微分型式の周期から構成される周期行列を使って複素トーラス $J(R)$ を構成することができる．これは Jacobi 多様体と呼ばれ主偏極 Abel 多様体の構造をもっている．Torelli の定理は，2 個の閉 Riemann 面 R, R' が同型であるための必要十分条件は対応する Jacobi 多様体 $J(R), J(R')$ が主偏極 Abel 多様体として同型であることを主張する．これが閉 Riemann 面のモジュライ理論の中心になる事実である．本書では閉 Riemann 面の幾何学を使って Torelli の定理の証明を与える. Torelli の定理はモジュライ理論の中で最も美しい定理であり，またモジュライ理論を考察するときの模範となる定理である．第 3 章では Hodge 理論を用いて Torelli の定理の高次元代数多様体への種々の拡張を議論する.

Jacobi 多様体の理論は閉 Riemann 面の 1 次元コホモロジー群の Hodge 分解と密接に関係している．Hodge は一般次元の非特異射影多様体の複素係数コホモロジー群が Hodge 分解

$$H^w(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=w} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p},$$

$$H^{p,q} \simeq H^q(M, \Omega_M^p) \quad (0 \leqq w \leqq 2\dim M,\ p,q \geqq 0)$$

をもつことを示し，閉 Riemann 面の 1 次元コホモロジー群の Riemann の条件を拡張して Hodge–Riemann の双線型関係式を得た．Hodge の理論は当初から代数的サイクル(部分代数多様体の整係数 1 次結合が作るコホモロジー類)の理論と密接に関係していた．特に，$2p$ 次元整係数コホモロジー類が (p,p) 型のときは代数的サイクルであろうという Hodge 予想は，$2p$ 次元有理数係数コホモロジー類の場合に修正された形で今なお未解決の重要な予想として残っている．この Hodge の理論は Hodge 構造の理論としてその本質的な部分が取り出され面目を一新した．一方，Hodge–Riemann の双線型関係式を使うことによって周期写像の理論を構成することができ，代数多様体のモジュライを Hodge 理論の立場から扱うことができる．このことは Griffiths によって精力的に探求され，モジュライの複素解析幾何学的な理論として大

きな成果を挙げた．本書では Hodge 理論の周期写像への応用を主として取り上げ，Torelli の定理の類似を議論する．最初は代数的サイクルに関しても詳しい記述を用意していたが，紙数の関係もあり，すべて省略せざるを得なくなったのは残念である．読者は引き続き代数的サイクルに関する理論を本書巻末の参考文献をもとに学習されることをお勧めする．

第 4 章では閉 Riemann 面のモジュライ理論の応用として共形場理論を述べる．共形場理論の誕生した背景とその意味は第 4 章の初めに比較的詳しく述べるのでここでは繰り返さない．一言で言えば，共形場理論とは，閉 Riemann 面上の有限個の点に粒子が飛び込んできたときの閉 Riemann 面の物理的状態を，無限次元ベクトル空間内の有限次元ベクトル空間を使って記述する理論である．無限次元ベクトル空間には通常は無限次元 Lie 代数の表現空間が使われる．本章では有限次元 Lie 代数から作られるアフィン Lie 代数の表現論を使う．どのような Lie 代数を使うかによって Abel 的共形場理論と非 Abel 的共形場理論とが登場する．

Abel 的共形場理論は閉 Riemann 面のモジュライ理論と密接に関係し，テータ函数も直接登場する意味では本書の題材として相応しいが，本書では非 Abel 的共形場理論，通常 Wess–Zumino–Witten モデルと呼ばれる理論を紹介する．これは，複素単純 Lie 代数をゲージ対称性としてもつ共形場理論であり，本書では Tsuchiya–Ueno–Yamada [91] の定式化に従って述べる．非 Abel 的共形場理論は無限次元 Lie 代数の表現論と密接に関係するが，閉 Riemann 面上の主束のモジュライ空間とも密接に関係していることが分かる．また共形場理論で大切な射影的平坦接続は小平–Spencer 写像を使って定義される．また共形場理論を使ってベクトル束のモジュライ空間上のある種の直線束の大域切断の次元を計算することができるという，Verlinde による素晴らしい発見についても概説する．こうした意味で，本章の内容は本書のタイトルに相応しい内容であると思われる．ただ，紙数の関係で証明をほとんど述べることができなかった．本章から複素解析幾何学，代数幾何学と理論物理学との深い結びつきの一端を味わっていただけることを期待したい．

目　次

1 小平–Spencer 写像

この序論では小平，Spencer によって始められた複素構造の変形理論について簡単に記す．複素構造の変形に関する小平–Spencer 理論は様々な構造の変形を考える端緒ともなった重要な理論である．それだけでなく，複素多様体の族(複素解析族)を考えることの大切さを初めて示した点でも重要である．この観点は Grothendieck によって徹底的に追究され，スキーム理論として結実したことはよく知られている．一方では複素解析族の研究は代数幾何学，複素解析幾何学における層係数のコホモロジー理論の進展をもたらした．連接層の固有写像定理やコホモロジーの上半連続性は基本的である．

本章では小平–Spencer 理論をできるだけ素朴な形で述べる．コンパクト複素多様体 M の複素構造の変形の 1 次近似は正則ベクトル場のなす層 Θ_M に値をとる 1 次元コホモロジー群 $H^1(M,\Theta_M)$ の元で記述できる．一般に函数の 1 次微係数がその函数のもつ基本的性質を明らかにするように，コホモロジー群 $H^1(M,\Theta_M)$ は複素多様体 M の複素構造の変形に関する基本的な情報を与える．これが小平と Spencer による重要な発見であった．

ところで，コンパクト複素多様体 M に “近い” 複素構造のすべてを記述する複素解析族が倉西族である．倉西族はモジュライ空間と密接な関係をもつが，モジュライ空間とは微妙に違うところがある．それは考察しているコンパクト複素多様体が自明でない自己同型をもつことに起因する．倉西族に現れる複素構造のうち同型なものを同一視することによって倉西族の底空間

に同値関係を導入することができる．この同値関係による商空間が M の定めるモジュライ空間の M に対応する点の近傍であると考えたいのであるが，商空間は複素解析空間とならないことがあり，このナイーヴな見方は不完全であることが分かる．そのため，モジュライ空間を得るためには複素多様体に付加的な構造を付け加える必要が生じる．この辺の事情は第2章で複素トーラスの場合に詳しく述べる．

本章では，さらに変形理論の考え方の応用としてベクトル束の無限小変形も簡単に考察することにする．

§1.1　複素構造の変形

(a)　複素解析族

以下，本書では複素多様体 M と M の点 Q に対して $T_Q(M)$ は点 Q での正則接ベクトル空間を意味するものとする．また複素多様体は特にことわらない限り連結と仮定する．

$m+n$ 次元複素多様体 $\mathcal{V}$ から m 次元複素多様体 $\mathcal{W}$ への正則写像 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ が条件

（1）　π は固有写像である．すなわち，$\mathcal{W}$ の任意のコンパクト集合 K の逆像 $\pi^{-1}(K)$ はコンパクト集合である．

（2）　π は滑らかな正則写像である．すなわち，任意の点 $P\in\mathcal{V}$ に対して正則接ベクトル空間の写像 $(d\pi)_P\colon T_P(\mathcal{V})\to T_{\pi(P)}(\mathcal{W})$ は全射である．

（3）　$\mathcal{W}$ の任意の点 $w\in\mathcal{W}$ に対してファイバー $\pi^{-1}(w)$ は常に連結である．

を満足するとき $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ を $\mathcal{W}$ 上の**コンパクト複素多様体の滑らかな族**(smooth family of compact complex manifolds)または**コンパクト複素多様体の複素解析族**(analytic family of compact complex manifolds)と呼ぶ．条件(1)，(2)より $\mathcal{W}$ の各点 w のファイバー $V_w=\pi^{-1}(w)$ はコンパクト複素多様体である．また点 $w_0\in\mathcal{W}$ を固定したとき，コンパクト複素多様体 V_w, $w\in\mathcal{W}$ はコンパクト複素多様体 V_{w_0} の**変形**(deformation)であるという．

コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ と正則写像 $h\colon \mathcal{S}\to\mathcal{W}$ が与えられたとき，ファイバー積 $\mathcal{V}\times_{\mathcal{W}}\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}$ 上の複素解析族になる．$\mathcal{V}\times_{\mathcal{W}}\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ は写像 h によって**引き戻された複素解析族**と呼ぶ．

例 1.1　上半平面 $H=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}\tau>0\}$ と複素平面 $\mathbb{C}$ の直積 $H\times\mathbb{C}$ に $\mathbb{Z}^2$ の作用を

$$\begin{array}{rccc}(m,n)\colon & H\times\mathbb{C} & \longrightarrow & H\times\mathbb{C},\ (m,n)\in\mathbb{Z}^2\\ & (\tau,\zeta) & \longmapsto & (\tau,\zeta+m+n\tau)\end{array}$$

と定義する．この作用は固定点をもたずに真性不連続であるので，商空間 $\mathcal{E}=H\times\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ は 2 次元複素多様体の構造をもつ．点 $(\tau,\zeta)\in H\times\mathbb{C}$ が定める $\mathcal{E}$ の点を $(\tau,[\zeta])$ と記す．自然な射影 $p\colon H\times\mathbb{C}\to H$ は正則写像

$$\begin{array}{rccc}\pi\colon & \mathcal{E} & \longrightarrow & H\\ & (\tau,[\zeta]) & \longmapsto & \tau\end{array}$$

を引き起こす．正則写像 $\pi\colon\mathcal{E}\to H$ は上の条件(1), (2), (3)を満足し，H 上の複素多様体の複素解析族をなす点 $\tau\in H$ に対してファイバー $E_\tau=\pi^{-1}(\tau)$ は基本周期 $(1,\tau)$ の 1 次元複素トーラスである．□

例 1.2　$SL(2,\mathbb{R})$ は上半空間 H に

$$\tau\longmapsto\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\quad \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$$

と作用する．正整数 n に対して $SL(2,\mathbb{Z})$ の正規部分群 $\Gamma(n)$ を

$$\Gamma(n)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\ \middle|\ \begin{array}{l}a\equiv d\equiv 1\pmod n\\ b\equiv c\equiv 0\pmod n\end{array}\right\}$$

と定義する．$n\geqq 3$ のとき $\Gamma(n)$ は H に固定点をもたずに作用することが知られている．$\Gamma(n)$ はまた例 1.1 の $\mathcal{E}$ に

$$(\tau,[\zeta])\longmapsto\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\left[\frac{\zeta}{c\tau+d}\right]\right)$$

と作用する．この作用も固定点をもたない．正則写像 $\pi\colon\mathcal{E}\to H$ は $\Gamma(n)$ の

$\mathcal{E}, H$ への作用と両立するので商空間の写像 $\pi(n)\colon \mathcal{E}(n)=\mathcal{E}/\Gamma(n)\to C(n)=H/\Gamma(n)$ が定義できる．$n\geqq 3$ のとき $\pi(n)\colon \mathcal{E}(n)\to C(n)$ も複素多様体の複素解析族である．□

(b)　小平–Spencer 写像

さて，コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ を局所座標を使って調べてみよう．点 $0\in\mathcal{W}$ の座標近傍 U と 0 を中心とする U の局所座標 $(w^1,\cdots,w^m)$ をとる．$\pi^{-1}(U)$ を座標近傍 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で覆う：$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda=\pi^{-1}(U)$. π は滑らかな写像であるので U_λ の局所座標として $(w^1,\cdots,w^m,z_\lambda^1,\cdots,z_\lambda^n)$ の形の座標を選ぶことができる．(すなわち $w^1,\cdots,w^m$ はすべての U_λ に共通に座標の一部として選ぶ.) $U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ のとき二つの局所座標の間には

$$z_\lambda^i=f_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n,w^1,\cdots,w^m),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.1}$$

という関係がある．ここで $f_{\lambda\mu}^i$ は $U_\lambda\cap U_\mu$ で正則な函数である．複素多様体 $\pi^{-1}(U)$ は $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を関係(1.1)で張り合わせてできると考えられる．そのとき $(w^1,\cdots,w^m)$ は張り合わせを変えるパラメータとみることができる．すなわち $(w^1,\cdots,w^m)=(0,\cdots,0)$ のとき $\pi^{-1}((0,\cdots,0))$ は複素多様体 V_0 であるが，それは張り合わせを $z_\lambda^i=f_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n,0,\cdots,0)$ で行なって得られる複素多様体であり，$w=(w^1,\cdots,w^m)$ に対して $V_w=\pi^{-1}(w)$ は V_0 の張り合わせを w によって少し変えたものとみることができる．したがって(1.1)を $w^1,\cdots,w^m$ に関して Taylor 展開した1次の項が，複素多様体 V_0 の変形の1次近似(通常，**無限小変形**(infinitesimal deformation)と呼ぶ)を与えていると考えられる．このことは $U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ のとき

$$\left\{\frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial w^k}(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n,0,\cdots,0)\right\},\quad 1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq k\leqq m$$

がなんらかの意味をもつことを推測させる．

いささか天下りではあるが，$U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ のとき

$$\theta_{\lambda\mu}^{(k)}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial w^k}(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n,0,\cdots,0)\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \tag{1.2}$$

を考えてみよう．これは $V_0\cap U_\lambda\cap U_\mu$ 上の正則ベクトル場である．$\theta_{\lambda\mu}^{(k)}$ の定

義ではU_λ上のベクトル場$\dfrac{\partial}{\partial z_\lambda^i}$を使っていることに注意する．$\dfrac{\partial}{\partial z_\mu^i}$の誤植ではない．さて$U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \varnothing$のとき(1.1)より

$$\begin{aligned} z_\lambda^i &= f_{\lambda\mu}^i(f_{\mu\nu}^1(z_\nu, w), \cdots, f_{\mu\nu}^n(z_\nu, w), w^1, \cdots, w^m) \\ &= f_{\lambda\nu}^i(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n, w^1, \cdots, w^m) \end{aligned}$$

が成立する．これより$U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$上では

$$\begin{aligned} \theta_{\lambda\nu}^{(k)} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\lambda\nu}^i}{\partial w^k}(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n, 0)\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial z_\mu^j}(f_{\mu\nu}^1(z_\nu, 0), \cdots, f_{\mu\nu}^n(z_\nu, 0), 0)\frac{\partial f_{\mu\nu}^j}{\partial w^k}(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n, 0)\cdot\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \\ &\qquad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial w^k}(f_{\mu\nu}^1(z_\nu, 0), \cdots, f_{\mu\nu}^n(z_\nu, 0), 0)\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{\mu\nu}^j}{\partial w^k}(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n, 0)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial z_\mu^j}\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i}\right) + \theta_{\lambda\mu}^{(k)} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{\mu\nu}^j}{\partial w^k}(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n, 0)\frac{\partial}{\partial z_\mu^j} + \theta_{\lambda\mu}^{(k)} \\ &= \theta_{\mu\nu}^{(k)} + \theta_{\lambda\mu}^{(k)} \end{aligned}$$

が成立する．すなわち$\{\theta_{\lambda\mu}^{(k)}\}$は正則ベクトル場に値をとるČechの1コサイクルであることが分かる．この1コサイクルが定義する$H^1(V_0, \Theta)$のコホモロジー類も$\{\theta_{\lambda\mu}^{(k)}\}$と記すことにする．ここに$\Theta$は$V_0$の正則ベクトル場のなす層である．

このコホモロジー類$\{\theta_{\lambda\mu}^{(k)}\}$は，局所座標$(w^1, \cdots, w^m)$を固定すれば$\pi^{-1}(U)$の局所座標近傍による開被覆$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$と局所座標$(z_\lambda^1, \cdots, z_\lambda^n, w^1, \cdots, w^m)$のとり方によらないことは容易に分かる．これより$\mathcal{W}$の点0での正則ベクトル空間$T_0\mathcal{W}$から$H^1(V_0, \Theta)$への線型写像

$$(1.3) \qquad \begin{array}{rccc} \rho_0\colon & T_0\mathcal{W} & \longrightarrow & H^1(V_0, \Theta) \\ & \sum a_k \dfrac{\partial}{\partial w^k} & \longmapsto & \sum a_k \{\theta_{\lambda\nu}^{(k)}\} \end{array}$$

が定義できる．これを**小平–Spencer 写像**と呼ぶ．

ところで，$\{\theta_{\mu\nu}^{(k)}\}$ の構成(1.2)で $w=0$ とおくかわりに

$$\theta_{\lambda\mu}^{(k)}(w)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_{\lambda\mu}^{i}}{\partial w^{k}}(z_{\mu}^{1},\cdots,z_{\mu}^{n},w)\frac{\partial}{\partial z_{\lambda}^{i}}$$

とおくと $\left\{\theta_{\lambda\mu}^{(k)}(w)\right\}\in H^1(V_w,\Theta)$ であることが，上とまったく同様の議論から出てくる．このとき $\theta_{\lambda\mu}^{(k)}(w)$ は w に関して正則である．そこで(1.3)と同様にして $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}$ 準同型写像

$$(1.4)\qquad \begin{array}{rccc}\rho: & \Theta_{\mathcal{W}} & \longrightarrow & R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}\\ & \sum a_k(w)\dfrac{\partial}{\partial w^k} & \longmapsto & \sum a_k(w)\left\{\theta_{\lambda\mu}^{(k)}(w)\right\}\end{array}$$

を得る．ここで $\Theta_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}$ は $\pi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ の相対正則ベクトル場のなす層である．この $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}$ 準同型写像 ρ も小平–Spencer 写像という．

コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ は滑らかな正則写像であるので $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$ 準同型写像の完全列

$$(1.5)\qquad 0\longrightarrow\Theta_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}\longrightarrow\Theta_{\mathcal{V}}\longrightarrow\pi^*\Theta_{\mathcal{W}}\longrightarrow 0$$

が存在する．この完全列より高次順像の長完全列

$$\longrightarrow\pi_*\Theta_{\mathcal{V}}\longrightarrow\pi_*\pi^*\Theta_{\mathcal{W}}=\Theta_{\mathcal{W}}\stackrel{\tau}{\longrightarrow}R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}\longrightarrow R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{V}}$$

ができるが，小平–Spencer 写像(1.4)はこの長完全列の $\mathcal{O}_{\mathcal{W}}$ 準同型写像 $\Theta_{\mathcal{W}}\stackrel{\tau}{\to}R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}$ と一致することが ρ の定義より容易に分かる．

問1　$\tau=\rho$ であることを証明せよ．

例1.3　例1.1の1次元複素トーラスの複素解析族 $\pi\colon\mathcal{E}\to H$ の小平–Spencer 写像を求めてみよう．1次元複素トーラス $E_\tau=\mathbb{C}/(1,\tau)$, $\tau\in H$ に対して $H^1(E_\tau,\Theta)\simeq H_{\bar\partial}^{0,1}(E_\tau,\Theta)\simeq\mathbb{C}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}d\bar\zeta$ であることに注意する．点 $\tau_0\in H$ の開近傍 U をとり，U の局所座標として H の座標 τ をとる．$\pi^{-1}(U)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, U_λ の局所座標として $\mathbb{C}\times H$ の座標 (ζ_λ,τ) をとる．$U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ であれば

$$\zeta_\lambda=\zeta_\mu+m_{\lambda\mu}+n_{\lambda\mu}\tau,\quad m_{\lambda\mu},n_{\lambda\mu}\in\mathbb{Z}$$

と書ける．したがって(1.2)より

$$\theta_{\lambda\mu} = n_{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial\zeta_\lambda}$$

と書ける．$\{\theta_{\lambda\mu}\}$ の定める $R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{E}/H}$ のコホモロジー類が $\rho\left(\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)$ である．このままでは見にくいので Dolbeault コホモロジーを使って表示する．

$$\theta_\lambda = (\tau-\overline{\tau})^{-1}(\overline{\zeta}_\lambda - \zeta_\lambda)\frac{\partial}{\partial\zeta_\lambda}$$

とおくと

$$\theta_{\lambda\mu} = \theta_\mu - \theta_\lambda$$

が成立し

$$\overline{\partial}\theta_\lambda = \frac{d\overline{\zeta}_\lambda}{\tau-\overline{\tau}}\frac{\partial}{\partial\zeta_\lambda} = \overline{\partial}\theta_\mu$$

は各 $\tau\in U$ で $H^{0,1}_{\overline{\partial}}(E_\tau,\Theta)$ の元を与える．すなわち

$$\rho\left(a\frac{\partial}{\partial\tau}\right) = \frac{a\sqrt{-1}}{2\operatorname{Im}\tau}\frac{\partial}{\partial\zeta}d\overline{\zeta}$$

が小平–Spencer 写像を与える．このことから $\tau\in H$ の各点で小平–Spencer 写像 $\rho_\tau\colon T_\tau H\to H^1(E_\tau,\Theta)$ は同型写像であることが分かる．

例 1.2 の $\pi(n)\colon \mathcal{E}(n)\to C(n)$ は，$n\geqq 3$ のとき $\pi\colon\mathcal{E}\to C$ とは複素解析族として局所的に同型であるので，$\pi(n)\colon\mathcal{E}(n)\to C(n)$ の小平–Spencer 写像も $C(n)$ の各点で同型である． □

同様の議論は n 次元複素トーラスの複素解析族に対しても成立する．

例 1.4 $n\times n$ 複素行列の全体を $M_n(\mathbb{C})$ と記す．

$$\mathcal{T} = \{S\in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(\operatorname{Im} S)\neq 0\}$$

は $M_n(\mathbb{C})$ の開集合である．$\mathcal{T}\times\mathbb{C}^n$ への $\mathbb{Z}^{2n}$ の作用を

$$\begin{array}{rccc}(\vec{l},\vec{m})\colon & \mathcal{T}\times\mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathcal{T}\times\mathbb{C}^n \\ & (S,\vec{\zeta}\,) & \longmapsto & (S,\ \vec{\zeta}+\vec{l}+\vec{m}S)\end{array}$$

と定義する．ただし $\vec{l}=(l_1,\cdots,l_n)$, $\vec{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\vec{\zeta}=(\zeta_1,\cdots,\zeta_n)\in\mathbb{C}^n$ とする．$\mathbb{Z}^{2n}$ の $\mathcal{T}\times\mathbb{C}^n$ への作用は固定点をもたず，真性不連続である．した

がって $\mathbb{T}=\mathcal{T}\times\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ は複素多様体である．$(S,\vec{\zeta})\in\mathcal{T}\times\mathbb{C}^n$ の定める $\mathbb{T}$ の点を $(S,[\vec{\zeta}])$ と記すと，正則写像

$$\begin{array}{rccc}\pi: & \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}\\ & (S,[\vec{\zeta}]) & \longmapsto & S\end{array}$$

は n 次元複素トーラスの複素解析族である．$M_n(\mathbb{C})$ の座標 (t_{ij}) を S_0 の開近傍 $U\subset\mathcal{T}$ の局所座標として選び，$\pi^{-1}(U)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$，$U_\lambda$ の局所座標を $\mathbb{C}^n$ の座標 $(\zeta_\lambda^1,\cdots,\zeta_\lambda^n)$ と (t_{ij}) にとる．$U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ であれば

$$\vec{\zeta}_\lambda=\vec{\zeta}_\mu+\vec{l}_{\lambda\mu}+\vec{m}_{\lambda\mu}S,\quad \vec{l}_{\lambda\mu},\,\vec{m}_{\lambda\mu}\in\mathbb{Z}^n$$

が成立する．したがって $\sum_{i,j}a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial t_{ij}}\in T_{S_0}\mathcal{T}$ に対して

$$\rho_{S_0}\left(\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial}{\partial t_{ij}}\right)=\left\{\sum_{i,j}m^i_{\lambda\mu}a_{ij}\frac{\partial}{\partial\zeta_\lambda^j}\right\}\in H^1(\pi^{-1}(S_0),\Theta)$$

が成立する．$(S-\overline{S})^{-1}=(c_{ij})$ と記し

$$\theta_\lambda=\sum_{k,i,j}(\overline{\zeta_\lambda^k}-\zeta_\lambda^k)c_{ki}a_{ij}\frac{\partial}{\partial\zeta_\lambda^j}$$

とおくと

$$\theta_{\lambda\mu}=\sum_{i,j}m^i_{\lambda\mu}a_{ij}\frac{\partial}{\partial\zeta_\lambda^j}=\theta_\mu-\theta_\lambda$$

が成立し，

$$\overline{\partial}\theta_\lambda=\sum c_{ki}a_{ij}\frac{\partial}{\partial\zeta_\lambda^j}d\overline{\zeta_\lambda^k}=\overline{\partial}\theta_\mu$$

は $H^{0,1}_{\overline{\partial}}(\pi^{-1}(S_0),\Theta)$ の元を与える．これが $\rho_{S_0}\left(\sum a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial t_{ij}}\right)$ の Dolbeault コホモロジーによる表示である．$\det(c_{ki})\neq0$ であるので ρ_0 は同型であることが分かる．∎

(c)　倉西族

小平–Spencer 写像のもつ意味を明らかにするために，次の定義を準備する．

定義 1.5　コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ と点 $0\in\mathcal{W}$, $V=\pi^{-1}(0)$ が次の条件を満足するとき，族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ は点 0 で**完備**(complete)であるという．

（条件）　コンパクト複素多様体の族 $\varpi\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ と点 $s\in\mathcal{N}$ および同型写像 $f_0\colon M=\varpi^{-1}(s)\to V$ が任意に与えられたとき，点 s の近傍 U から $\mathcal{W}$ への正則写像 g と正則写像 $f\colon \varpi^{-1}(U)\to\mathcal{V}$ を

$$g(s)=0$$

$$f|\varpi^{-1}(s)=f_0$$

が成り立つように，また任意の点 $u\in U$ に対して $f|\varpi^{-1}(u)$ は $\varpi^{-1}(u)$ から $\pi^{-1}(g(u))$ への正則同型写像であり，かつ可換図式

$$\begin{array}{ccc} \varpi^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & \mathcal{W} \end{array} \tag{1.6}$$

が成り立つように見出すことができる．

このとき族 $\varpi^{-1}(U)\to U$ は族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ の g による引き戻しと正則同型である．

さらに上の条件を満足する種々の g に対して $(dg)_s$ が一意的に定まるとき，族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ は点 0 で**半普遍的**(versal, semi-universal)であるという．特に g が一意的に定まるとき，$\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ は点 0 で**普遍的**(universal)であるという．□

族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ が点 0 で半普遍的であるが普遍的でないのは $V=\pi^{-1}(0)$ の解析的自己同型群の性質による．次の定理は応用上重要である．

定理 1.6　コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ が点 $0\in\mathcal{W}$ の近傍で完備でありかつ点 0 で半普遍的，かつ $H^0(V_0,\Theta)=0$ であれば族 π は点 0 で普遍的である．□

$H^0(V_0,\Theta)\neq 0$ のときでも普遍族が存在することがある．例 1.4 の複素解析族 $\pi\colon \mathbb{T}\to\mathcal{T}$ は $\mathcal{T}$ の各点で普遍的である．小平–Spencer 写像と完備族，半普遍族との関係は次の定理で与えられる．

定理 1.7　複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ の点 $w\in\mathcal{W}$ での小平–Spencer 写像が全射であれば複素解析族は点 w で完備である．　□

定理 1.8　コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ が点 $0\in\mathcal{W}$ で半普遍的であるための必要十分条件は π は点 0 の近傍の各点で完備であり，かつ点 0 での小平–Spencer 写像 $\rho_0\colon T_0\mathcal{W}\to H^1(\pi^{-1}(0),\Theta)$ が同型であることである．　□

注意 1.9　コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ の定義で $\mathcal{V},\mathcal{W}$ を複素多様体として今まで議論してきたが，そのことは本質的でない．$\mathcal{V},\mathcal{W}$ を一般の被約とは限らない解析空間としても複素解析族を定義することができる．解析空間の正則写像 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ が $\mathcal{V}$ の各点 P で**滑らか**(smooth)であることを次のように定義すればよい：$\mathbb{C}^n$ の開集合 W と $\pi(P)$ の近傍 U を適当に選ぶと，$U\times W$ と解析空間として同型であるように P の近傍 U_P をとることができる．この定義によって§1.1(a)の(1), (2), (3)を満足する解析空間の写像 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ をコンパクト複素多様体の複素解析族と呼ぶ．このとき $\mathcal{W}$ の各点 $w\in\mathcal{W}$ の逆像 $\pi^{-1}(w)$ はコンパクト複素多様体である．小平–Spencer 写像に必要な正則接空間には $\mathcal{W}$ の点 w での **Zariski 接空間**(Zariski tangent space)を使えば上とまったく同様の議論が適用できる．このように一般化しても定理 1.6, 1.7, 1.8 は成立する．

定義 1.10　コンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ が $\mathcal{W}$ の各点で完備であり，かつ点 $0\in\mathcal{W}$ で半普遍的であるとき，族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$ は $V_0=\pi^{-1}(0)$ の**倉西族**(Kuranishi family)であるという．また，底空間 $\mathcal{W}$ を**倉西空間**(Kuranishi space)という．ただし $\mathcal{V},\mathcal{W}$ は 一般の解析空間であると仮定する．　□

命題 1.11　コンパクト複素多様体 V の倉西族 $\pi\colon \mathcal{V}\to\mathcal{W}$, $V=\pi^{-1}(0)$, $0\in\mathcal{W}$ が点 0 で普遍的であれば，V の複素解析的同型群の有限部分群 G は $\mathcal{W}$ の 0 の近傍に複素解析的に作用し，0 は群 G の固定点である．

［証明］　$f_0\in G$ は同型 $f_0\colon V\to\pi^{-1}(0)$ を与え，この同型に対して $0\in\mathcal{W}$ の近傍 U と可換図式を与える単射同型写像 f,g

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{g} & \mathcal{W} \end{array}$$

が存在する．このとき $g(0)=0$ である．さらに族は点 0 で普遍的であるので g は一意的に定まる．$\widehat{U}=\bigcap_{g\in G} g(U)$ とおき，倉西族 $\pi^{-1}(\widehat{U})\to\widehat{U}$ を考えればよい． ∎

V_0 の倉西族は点 0 の近傍 U の各点でも倉西族であることが多い．このような場合，もし $H^0(V_0,\Theta)=0$ であれば U を十分小さくとっておけばコホモロジー群の上半連続性から $w\in U$ に対しても $H^0(V_w,\Theta)=0$ が成り立ち，倉西族は U のすべての点で普遍的である．V_0 の複素解析的自己同型群 $G=\mathrm{Aut}(V_0)$ が有限群であれば上の命題により G は U に作用していると仮定することができる．このとき商空間 U/G の各点は V_0 に近い相異なる複素構造に対応している．このことから U/G はモジュライ空間の V_0 に対応する点の近傍を与えていると考えることができる．たとえば，V_0 が種数 $g\geqq 3$ のコンパクト Riemann 面であれば，以上の条件はすべて満たされている．したがって，U/G を張り合わせてモジュライ空間が構成されていると考えることができる．この方法ではモジュライ空間の大域的な性質を調べることは難しいが，局所的な性質は詳しく調べることができる．種数 $g\geqq 3$ のコンパクト Riemann 面 R は一般には自己同型群は恒等写像よりなるので，モジュライ空間は R に対応する点の近傍では非特異である．一方 $\mathrm{Aut}(R)$ が自明でないときはモジュライ空間は R に対応する点で一般には商特異点をもっていることが分かる．

例 1.12　$y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ が定義する楕円曲線の族を考える．正確には $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}\times\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内に方程式

$$x_0x_2^2-x_1(x_1-x_0)(x_1-\lambda x_0)=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$$

で定義される部分多様体を $\mathcal{E}$ と記し，$S=\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ とおく．自然な射影 $S\times\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ から引き起こされる正則写像 $\pi\colon\mathcal{E}\to S$ により，π は S 上の

複素解析族である．$\pi\colon \mathcal{E}\to S$ は S の各点で普遍的であり，倉西族である．$\mathbb{P}^1$ の斉次座標 $(\lambda_0:\lambda_1)$ を使って $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$ 内に

$$\lambda_0 x_0 x_2^2 - x_1(x_1-x_0)(\lambda_0 x_1 - \lambda_1 x_0) = 0$$

で定義される2次元代数多様体 $\overline{\mathcal{E}}$ を考える．$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$ の $\mathbb{P}^1$ への射影から定まる正則写像 $\pi\colon \overline{\mathcal{E}}\to\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^1\setminus\{(1:0),(1:1),(0:1)\}$ 上では $\lambda=\lambda_1/\lambda_0$ とおくことによって π と一致する．$\overline{\mathcal{E}}$ は $0=(1:0)$, $1=(1:1)$, $\infty=(0:1)$ 上のファイバーで特異点をもっている．特異点の除去を行ない，必要ならばファイバーに現れる第1種例外曲線をブローダウンすることによって非特異代数曲面 $\widetilde{\mathcal{E}}$ と正則写像 $\widetilde{\pi}\colon\widetilde{\mathcal{E}}\to\mathbb{P}^1$ を得る．$\widetilde{\pi}$ によって $\widetilde{\mathcal{E}}$ は $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面の構造をもつ．点 $0,1$ 上のファイバーは Kodaira [55]の記号を使えばタイプ I_2 型の特異ファイバー(これは2本の $\mathbb{P}^1$ が2点で横断的に交わったもの)，∞ 上の特異ファイバーはタイプ I_2^* 型(これは7本の $\mathbb{P}^1$ が図1.1のように横断的に交わったものであり，$\widetilde{\pi}=\infty$ で定義される $\widetilde{\mathcal{E}}$ 上の因子は

$$2E_1+2E_2+2E_3+E_4+E_5+E_6+E_7$$

の形をしている)である．

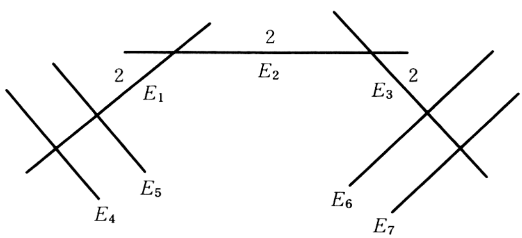


図1.1

$\widetilde{\pi}\colon\widetilde{\mathcal{E}}\to\mathbb{P}^1$ を楕円曲面と呼び図1.2のように図示することがある．このとき，$\mathbb{P}^1$ の点0および1のまわりの局所モノドロミーはファイバー $E_s=\widetilde{\pi}^{-1}(s)$ の1次元ホモロジー群 $H_1(E_s,\mathbb{Z})$ の基底をうまく選ぶと行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表され，点 ∞ のまわりの局所モノドロミーは行列

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される. □

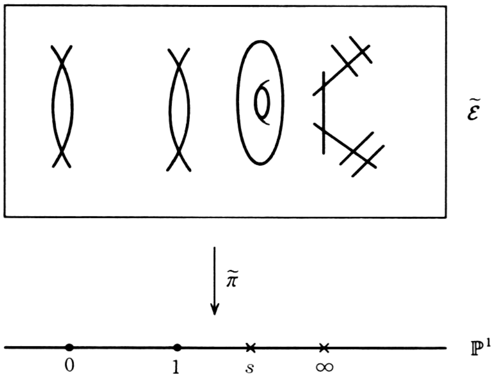


図 1.2

例 1.13（Hirzebruch–永田曲面）　$\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$ を 2 個用意し，それぞれの座標を $(u,(\zeta_0:\zeta_1))$, $(v,(\eta_0:\eta_1))$ と記す．ここで $(\zeta_0:\zeta_1)$, $(\eta_0:\eta_1)$ は $\mathbb{P}^1$ の斉次座標である．この 2 個の $\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$ を関係

$$(1.7)\qquad \begin{cases} u=1/v \\ (\zeta_0:\zeta_1)=(\eta_0:v^m\eta_1) \end{cases}$$

で張り合わせる．こうして得られる 2 次元コンパクト複素多様体を F_m と記し，**Hirzebruch–永田曲面**(Hirzebruch-Nagata surface)と呼ぶ．$\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$ から第 1 成分への射影から全射正則写像 $\pi\colon F_m\to\mathbb{P}^1$ を得，F_m は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束となり，有理曲面であることが分かる．Hirzebruch–永田曲面 F_m は $\mathbb{P}^1$ 上の次数 m の直線束 $\mathbb{L}$ の各ファイバーに無限遠点を付け加えて得られる $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ 束と考えることもできる．F_m と F_{-m} とは同型であるので，$m\geqq 0$ の場合を考えれば十分である．また，$F_0=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ である．

さて，上の張り合わせ(1.7)を変形してパラメータ $t\in\mathbb{C}$ をもった張り合わせの関係式

$$(1.8)\qquad \begin{cases} u=1/v \\ (\zeta_0:\zeta_1)=(\eta_0:v^m\eta_1+tv^k\eta_0), \quad 0\leqq k\leqq \dfrac{m}{2} \end{cases}$$

で2個の $\mathbb{C}\times\mathbb{P}^1$ を張り合わせると，各 $t\in\mathbb{C}$ に対して曲面 S_t が定義できる．$S_0=F_m$ であり，$\varphi\colon\mathcal{S}=\{S_t\}_{t\in\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ は複素解析族である．

$\mathbb{P}^1$ の斉次座標を $\zeta=\dfrac{\zeta_1}{\zeta_0}$，$\eta=\dfrac{\eta_1}{\eta_0}$ と記し，$t\neq 0$ のとき

$$\zeta'=\frac{u^k\zeta-t}{t\zeta},\quad \eta'=\frac{\eta}{tv^{m-k}\eta+t^2}$$

とおくと，関係式(1.8)は

$$\begin{cases} u=1/v \\ \zeta'=v^{m-2k}\eta' \end{cases}$$

となり，$t\neq 0$ のとき $S_t\simeq F_{m-2k}$ であることが分かる．

一方

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(F_m,\Theta)=\begin{cases} 6, & m=0 \\ m+5, & m\geqq 1 \end{cases}$$

が成り立つので，F_m と F_{m-2k} とは $k\neq 0$ のとき同型ではない．また

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(F_m,\Theta)=\begin{cases} 0, & m=0,\ 1 \\ m-1, & m\geqq 2 \end{cases}$$

が成り立つ．このことから $m=2$ のとき上の族 $\varphi\colon\mathcal{S}\to\mathbb{C}$ は原点で倉西族であることを示すことができる．一方，$m=2$，$k=1$ のとき $t\neq 0$ では $S_t\simeq F_0$ であるので，$t\neq 0$ では倉西族ではない． □

例 1.14（Hopf 曲面）　$1<|a|$，$1<|b|$ を満足する複素数 a,b に対して $W=\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$ の正則自己同型

$$g(z_1,z_2)=(az_1,bz_2)$$

が生成する無限巡回群 $\langle g\rangle$ は W に真性不連続に作用し，固定点をもたない．商多様体 $S_{a,b}=W/\langle g\rangle$ はコンパクト複素多様体であり，**Hopf 曲面**(Hopf

surface)と呼ばれる．Hopf 曲面 $S_{a,b}$ は円と 3 次元球面の直積 $S^1\times S^3$ と可微分同相である．したがって特に $b_1(S_{a,b})=1$ となり，Hopf 曲面は Kähler 多様体の構造をもたない．$H^2(S_{a,b},\Theta)=0$ であり，

$$\dim H^1(S_{a,b},\Theta)=\begin{cases}4, & a=b\\ 2, & a\neq b\end{cases}$$

が成り立つことが分かる．条件

$$|a+d|>3,\quad |(a-d)^2+4bc|<1$$

を満足する 2×2 行列

$$t=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

の W への作用を

$$t\colon\ z=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}\longmapsto t(z)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$$

と定義すると W の正則自己同型になる．この正則自己同型も t と記すことにする．行列 t に対して

$$\sigma(t)=\frac{1}{2}(a+d),\quad \Delta(t)=\frac{1}{4}(a-d)^2+bc$$

とおくと，$\sigma(t)\pm\Delta(t)$ が行列 t の固有値であり，上の条件から

$$|\sigma(t)\pm\Delta(t)|>1$$

であることが分かる．このことから W の正則自己同型 t が生成する無限巡回群 $\langle t^n\rangle$ は W に真性不連続に作用し，固定点をもたず，商多様体 $W/\langle t^n\rangle$ は Hopf 多様体であることが分かる．そこで

$$M=\left\{t=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle|\ |\sigma(t)|<3/2,\ |\Delta(t)|<1/4\right\}$$

とおき，$W\times M$ の正則自己同型 η を

$$\eta(z,t)=(t(z),t)$$

と定義する．η の生成する無限巡回群 $G=\langle\eta\rangle$ は W に真性不連続に作用し，固定点をもたない．したがって商空間 $\mathcal{V}=W\times M/G$ は複素多様体であり自

然な正則写像 $\pi: \mathcal{V} \to M$ によって Hopf 曲面の複素解析族ができる．この族は M の各点で完備であり，$\Delta(t)=0$ となる点 $t \in M$ で倉西族であることが分かる．しかし，$\Delta(t) \neq 0$ となる点 $t \in M$ では倉西族の底空間の次元は 2 でなければならないので，倉西族ではない． □

例 1.13，例 1.14 のように V_0 の倉西族は V_s，$s \neq 0$ の倉西族であるとは限らないことに注意する．

(d)　変形の障害類

コンパクト複素多様体 V に対して $H^1(V, \Theta_V)$ の各元が V の無限小変形を与えることは次のようにして示すことができる．$\eta \in H^1(V, \Theta_V)$ をČech のコホモロジー類として表現して考える．座標近傍による V の開被覆 $V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ をとり，U_λ の局所座標を $(z_\lambda^1, \cdots, z_\lambda^n)$ と記す．$U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ のとき，二つの局所座標の関係は

$$z_\lambda^i = g_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n) \tag{1.9}$$

と書くことができる．$g_{\lambda\mu}^i$ は $U_{\lambda\mu} = U_\lambda \cap U_\mu$ 上の正則函数である．また開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ によってコホモロジー類 η は $\{\eta_{\lambda\mu}\}$

$$\eta_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^n h_{\lambda\mu}^i(z_\mu) \frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \tag{1.10}$$

と表示できるとしよう．ε は $\varepsilon^2 = 0$ となる双対数，すなわち $A = \mathbb{C}[t]/(t^2)$ の t の像を ε とする．点 0 の上に構造層 A をのせた環つき空間 $(0, A)$ を考えると，これは解析空間である．これは複素平面 $\mathbb{C}$ 内にイデアル (t^2) が定義する閉部分解析空間とみることができる．この解析空間を $\mathrm{Specan}\,A$ と記す．そこで $U_\lambda \times \mathrm{Specan}\,A$ と $U_\mu \times \mathrm{Specan}\,A$ を $U_{\lambda\mu} \times \mathrm{Specan}\,A$ 上で

$$z_\lambda^i = g_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n) + \varepsilon h_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1, \cdots, z_\mu^n) \tag{1.11}$$

と張り合わせる．これがうまく張り合うためには $U_{\lambda\mu\nu} = U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \varnothing$ 上で二つの張り合わせが一致する，すなわち

$$\begin{aligned} z_\lambda^i &= g_{\lambda\nu}^i(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n) + \varepsilon h_{\lambda\nu}^i(z_\nu^1, \cdots, z_\nu^n) \\ &= g_{\lambda\mu}^i(g_{\mu\nu}^1(z_\nu) + \varepsilon h_{\mu\nu}^1(z_\nu), \cdots, g_{\mu\nu}^n(z_\nu) + \varepsilon h_{\mu\nu}^n(z_\nu)) \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$+\varepsilon h^i_{\lambda\mu}(g^1_{\mu\nu}(z_\nu)+\varepsilon h^1_{\mu\nu}(z_\nu),\cdots,g^n_{\mu\nu}(z_\nu)+\varepsilon h^n_{\mu\nu}(z_\nu))$$

が成立する必要がある．$\varepsilon^2=0$ と $\left\{\sum_{i=1}^n h^i_{\lambda\mu}(z_\mu)\dfrac{\partial}{\partial z^i_\lambda}\right\}$ が 1 コサイクルであることに注意すると

$$\begin{aligned}
&g^i_{\lambda\mu}(g^1_{\mu\nu}(z_\nu)+\varepsilon h^1_{\mu\nu}(z_\nu),\cdots,g^n_{\mu\nu}(z_\nu)+\varepsilon h^n_{\mu\nu}(z_\nu))\\
&\quad+\varepsilon h^i_{\lambda\mu}(g^1_{\mu\nu}(z_\nu)+\varepsilon h^1_{\mu\nu}(z_\nu),\cdots,g^n_{\mu\nu}(z_\nu)+\varepsilon h^n_{\mu\nu}(z_\nu))\\
&=g^i_{\lambda\mu}(g^1_{\mu\nu}(z_\nu),\cdots,g^n_{\mu\nu}(z_\nu))\\
&\quad+\varepsilon\left\{\sum_{k=1}^n\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu}h^k_{\mu\nu}(z^1_\nu,\cdots,z^n_\nu)+h^i_{\lambda\mu}(g^1_{\mu\nu}(z_\nu),\cdots,g^n_{\mu\nu}(z_\nu))\right\}\\
&=g^i_{\lambda\nu}(z^1_\nu,\cdots,z^n_\nu)+\varepsilon h^i_{\lambda\nu}(z^1_\nu,\cdots,z^n_\nu)
\end{aligned}$$

となり(1.12)が成立することが分かる．このようにして $\{U_\lambda\times\mathrm{Specan}\,A\}_{\lambda\in\Lambda}$ を(1.11)の関係式で張り合わせることによって解析空間 V^η と正則写像 $\pi\colon V^\eta\to\mathrm{Specan}\,A$ を得る．V^η の構成する π は滑らかな写像であることが分かり，上記の性質(1), (2), (3)を満たす．したがって $\pi\colon V^\eta\to\mathrm{Specan}\,A$ は複素解析族である．Specan A の原点での Zariski 接空間は $\dfrac{\partial}{\partial t}$ より張られ，π の小平–Spencer 写像 ρ により $\rho\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)=\eta$ であることは(1.11)より直ちに分かる．

$\dim_{\mathbb{C}}H^1(V,\Theta_V)=m$ のとき，$H^1(V,\Theta_V)$ の基底 $\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\}$ を一つ固定して考える．$\mathbb{C}[t_1,t_2,\cdots,t_m]$ 内ですべての t_it_j, $1\leqq i,j\leqq n$ で生成されるイデアルを J とし，環 $A_n=\mathbb{C}[t_1,t_2,\cdots,t_n]/J$ を考える．t_i の定める A_n の元を ε_i と記し，V の座標近傍による開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を上と同じようにとり，$\eta_i\in H^1(V,\Theta_V)$ は $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ では 1 コサイクル $\{\eta^{(i)}_{\lambda\mu}\}$ で表示されたとする．このとき $U_{\lambda\mu}=U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ ならば $U_\lambda\times\mathrm{Specan}\,A_n$ と $U_\mu\times\mathrm{Specan}\,A_n$ とを

$$z^i_\lambda=g^i_{\lambda\mu}(z^1_\mu,\cdots,z^n_\mu)+\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\eta^{(i)}_{\lambda\mu}(z^1_\mu,\cdots,z^n_\mu)\tag{1.13}$$

で張り合わせることができ，複素解析族 $\pi\colon\mathcal{V}\to\mathcal{W}=\mathrm{Specan}\,A_n$ ができることが，上と同様の議論で証明できる．この複素解析族に関しては小平–Spencer 写像は同型写像であることも(1.13)から直ちに分かる．

以上の構成法は V の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ のとり方とコホモロジー類 η や η_i の1コサイクルとしての表示の仕方に依存しているが，実はどのような開被覆をとっても，どのような1コサイクルの表示をとっても，同じコホモロジー類を表す限り，同型な複素解析族を得ることを示すことができる．

またコンパクト複素多様体 V に対して $\mathrm{Specan}\,\mathbb{C}[t]/(t^2)$ 上の V の変形を与えることは $H^1(V,\Theta_V)$ の元 η を与えることと同値であることも上の構成法から明らかである．

ところで V の η 方向への1次の無限小変形(1.11)が与えられたとき，この無限小変形を $\mathrm{Specan}\,\mathbb{C}[t]/(t^3)$ 上の変形(2次の無限小変形)まで延ばすことは可能であろうか．さらに一般には $\mathrm{Specan}\,\mathbb{C}[t]/(t^n)$ まで無限小変形が延ばせたとして，さらに $\mathrm{Specan}\,\mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$ まで無限小変形を延ばすことは可能であろうか．このことを考察してみよう．

そのために t の定める $\mathbb{C}[t]/(t^3)$ の元を以下 t と略記し，(1.11)を拡張して $U_{\lambda\mu}\times\mathrm{Specan}\,\mathbb{C}[t]/(t^3)$ で

(1.14)　$z_\lambda^i = g_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n)+th_{\lambda\mu}^i(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n)+t^2h_{\lambda\mu|2}^i(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n)$

と書いてみる．ここで $\displaystyle\sum_{i=1}^n h_{\lambda\mu|2}^i(z_\mu^1,\cdots,z_\mu^n)\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i}$ は $U_{\lambda\mu}$ の正則ベクトル場である．これが $\mathrm{Specan}\,\mathbb{C}[t]/(t^3)$ 上の V の変形を与えるためには $U_{\lambda\mu\nu}\neq\varnothing$ 上で二つの張り合わせ方が一致する必要がある．すなわち $U_{\lambda\mu\nu}\neq\varnothing$ である限り

(1.15)
$$\begin{aligned} &g_{\lambda\mu}^i(g_{\mu\nu}^1(z_\nu)+th_{\mu\nu}^1(z_\nu)+t^2h_{\mu\nu|2}^1(z_\nu),\cdots,\\ &\qquad g_{\mu\nu}^n(z_\nu)+th_{\mu\nu}^n(z_\nu)+t^2h_{\mu\nu|2}^n(z_\nu))\\ &+th_{\lambda\mu}^i(g_{\mu\nu}^1(z_\nu)+th_{\mu\nu}^1(z_\nu)+t^2h_{\mu\nu|2}^1(z_\nu),\cdots,\\ &\qquad g_{\mu\nu}^n(z_\nu)+th_{\mu\nu}^n(z_\nu)+t^2h_{\mu\nu|2}^n(z_\nu))\\ &+t^2h_{\lambda\mu|2}^i(g_{\mu\nu}^1(z_\nu)+th_{\mu\nu}^1(z_\nu)+t^2h_{\mu\nu|2}^1(z_\nu),\cdots,\\ &\qquad g_{\mu\nu}^n(z_\nu)+th_{\mu\nu}^n(z_\nu)+t^2h_{\mu\nu|2}^n(z_\nu))\\ &= g_{\lambda\nu}^i(z_\nu^1,\cdots,z_\nu^n)+th_{\lambda\nu}^i(z_\nu^1,\cdots,z_\nu^n)+t^2h_{\lambda\nu|2}^i(z_\nu^1,\cdots,z_\nu^n)\end{aligned}$$

が成り立つ必要がある．$t^3=0$ に注意して(1.15)の左辺を計算すると

$$\begin{aligned}
&g^i_{\lambda\mu}(g^1_{\mu\nu}(z_\nu),\cdots,g^n_{\mu\nu}(z_\nu))\\
&\quad+t\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))h^k_{\mu\nu}(z_\nu)+h^i_{\lambda\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))\right)\\
&\quad+t^2\left\{\sum_{k=1}^n\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))h^k_{\mu\nu|2}(z_\nu)+h^i_{\lambda\mu|2}(g_{\mu\nu}(z_\nu))\right.\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial^2 g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu\partial z^l_\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))h^k_{\mu\nu}(z_\nu)h^l_{\mu\nu}(z_\nu)\\
&\qquad\left.+\sum_{k=1}^n\frac{\partial h^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))h^k_{\mu\nu}(z_\nu)\right\}
\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる. $\left\{\sum_{i=1}^n h^i_{\lambda\mu}(z)\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}\right\}$ が1コサイクルであることに注意すると(1.15)が成立するためには $U_{\lambda\mu\nu}\neq\varnothing$ 上で

$$\begin{aligned}
(1.16)\quad h^i_{\lambda\nu|2}(z_\nu)&=h^i_{\lambda\mu|2}(g_{\mu\nu}(z_\nu))+\sum_{k=1}^n\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))h^k_{\mu\nu|2}(z_\nu)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial^2 g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu\partial z^l_\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))h^k_{\mu\nu}(z_\nu)h^l_{\mu\nu}(z_\nu)\\
&\quad+\sum_{k=1}^n\frac{\partial h^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu}(g_{\mu\nu}(z_\nu))h^k_{\mu\nu}(z_\nu)
\end{aligned}$$

が成立することが必要十分条件であることが分かる. (1.16)の意味を明らかにするために, $H^1(V,\Theta_V)$ の1コサイクル $\{\eta_{\lambda\mu}\}$ に対してベクトル場のブラケット積[,]を使って2コチェイン $\{\theta_{\lambda\mu\nu}\}$ を

$$\theta_{\lambda\mu\nu}=[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\nu}]$$

と定義する.

$$\begin{aligned}
(\delta\theta)_{\lambda\mu\nu\zeta}&=\theta_{\mu\nu\zeta}-\theta_{\lambda\nu\zeta}+\theta_{\lambda\mu\zeta}-\theta_{\lambda\mu\nu}\\
&=[\eta_{\mu\nu},\eta_{\nu\zeta}]-[\eta_{\lambda\nu},\eta_{\nu\zeta}]+[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\zeta}]-[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\nu}]\\
&=[\eta_{\mu\nu}-\eta_{\lambda\nu},\eta_{\nu\zeta}]+[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\zeta}-\eta_{\mu\nu}]\\
&=-[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\zeta}]+[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\zeta}-\eta_{\mu\nu}]\\
&=[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\zeta}-\eta_{\mu\nu}-\eta_{\mu\zeta}]=0
\end{aligned}$$

が成立するので $\{\theta_{\lambda\mu\nu}\}\in H^2(V,\Theta_V)$ である．この事実を $\eta=\{\eta_{\lambda\mu}\}\in H^1(V,\Theta_V)$ に対して $[\eta,\eta]\in H^2(V,\Theta_V)$ であると略記する．

そこで

$$\eta_{\lambda\mu}=\sum_{i=1}^{n}h^i_{\lambda\mu}\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda},\quad \xi_{\lambda\mu}=\sum_{i=1}^{n}h^i_{\lambda\mu|2}\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}$$

とおく．(1.16)の両辺に $\dfrac{\partial}{\partial z^i_\lambda}$ を掛けて i に関する和をとることによって

$$\begin{aligned}\xi_{\lambda\nu}&=\xi_{\lambda\mu}+\xi_{\mu\nu}\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu\partial z^l_\mu}h^k_{\mu\nu}h^l_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}\\&\quad+\sum_{i,k=1}^{n}h^k_{\mu\nu}\frac{\partial h^i_{\lambda\mu}}{\partial z^k_\mu}\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}\end{aligned}\tag{1.17}$$

を得る．そこでこの式の最後の2項の和を $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ とおき $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ の変形を考える．$\{\eta_{\alpha\beta}\}$ は1コサイクルであるので，(1.10)より

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^l_\mu}h^l_{\mu\nu}=h^i_{\lambda\nu}-h^i_{\lambda\mu}$$

が成り立つことに注意すると

$$\begin{aligned}2\Gamma_{\lambda\mu\nu}&=\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}h^k_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial z^k_\mu}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^l_\mu}h^l_{\mu\nu}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}\\&\quad-\sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^l_\mu}\left(\sum_{k=1}^{n}h^k_{\mu\nu}\frac{\partial h^l_{\mu\nu}}{\partial z^k_\mu}\right)\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}+2\eta_{\mu\nu}(\eta_{\lambda\mu})\\&=\eta_{\lambda\mu}(\eta_{\lambda\nu}-\eta_{\lambda\mu})-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial z^l_\mu}\eta_{\mu\nu}(h^l_{\mu\nu})\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}+2\eta_{\mu\nu}(\eta_{\lambda\mu})\\&=\eta_{\mu\nu}(\eta_{\lambda\nu})+\eta_{\mu\nu}(\eta_{\lambda\mu})-\eta_{\mu\nu}(\eta_{\mu\nu})\end{aligned}$$

が成立することが分かる．ただしここで

$$\eta_{\mu\nu}(\eta_{\lambda\nu})=\sum_{i,l=1}^{n}h^l_{\mu\nu}\frac{\partial h^i_{\lambda\nu}}{\partial z^l_\mu}\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}$$

$$\eta_{\mu\nu}(\eta_{\mu\nu})=\sum_{j,l=1}^{n}h^l_{\mu\nu}\frac{\partial h^j_{\mu\nu}}{\partial z^l_\mu}\frac{\partial}{\partial z^i_\mu}$$

などと約束する．すると $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ が1コサイクルであることから

$$\theta_{\lambda\mu\nu}=[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\nu}]=[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\lambda\nu}]=\eta_{\lambda\mu}(\eta_{\lambda\nu})-\eta_{\lambda\nu}(\eta_{\lambda\mu})$$

が成立し，さらに

$$\begin{aligned}2\Gamma_{\lambda\mu\nu}+\theta_{\lambda\mu\nu}&=(\eta_{\mu\nu}+\eta_{\lambda\mu})(\eta_{\lambda\nu})+(\eta_{\mu\nu}-\eta_{\lambda\nu})(\eta_{\lambda\mu})-\eta_{\mu\nu}(\eta_{\mu\nu})\\&=\eta_{\lambda\nu}(\eta_{\lambda\nu})-\eta_{\lambda\mu}(\eta_{\lambda\mu})-\eta_{\mu\nu}(\eta_{\mu\nu})\end{aligned}$$

が成立することが分かる．そこで

$$\tau_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}(\eta_{\alpha\beta})$$

とおくと(1.17)は

$$\xi_{\lambda\nu}=\xi_{\lambda\mu}+\xi_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\theta_{\lambda\mu\nu}-\frac{1}{2}(\tau_{\mu\nu}-\tau_{\lambda\nu}+\tau_{\lambda\mu})$$

となる．すなわち

$$\theta_{\lambda\mu\nu}=2(\xi_{\mu\nu}-\xi_{\lambda\nu}+\xi_{\lambda\mu})-(\tau_{\mu\nu}-\tau_{\lambda\nu}+\tau_{\lambda\mu}) \tag{1.18}$$

が成立する．したがって(1.15)が成立するように(1.14)の $h^i_{\lambda\mu|2}$ を選ぶことができるための必要十分条件は，コホモロジー類 $\{\theta_{\lambda\mu\nu}\}=\{[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\nu}]\}$ が $H^2(V,\Theta)$ で 0 であることが分かる．

定理 1.15 コンパクト複素多様体 V の正則ベクトル場に値をとる 1 次コホモロジー類 $\eta=\{\eta_{\lambda\mu}\}\in H^1(V,\Theta)$ が定める Specan $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ 上の複素解析族 V^η が Specan $\mathbb{C}[t]/(t^3)$ 上の複素解析族に延長できるための必要十分条件は $[\eta,\eta]=\{[\eta_{\lambda\mu},\eta_{\mu\nu}]\}\in H^2(V,\Theta)$ が 0 であることである． □

一般に $\eta\in H^1(V,\Theta)$ に対して元 $[\eta,\eta]\in H^2(V,\Theta)$ を η 方向の変形の**障害類**(obstruction class)という．以上の議論をさらに 3 次以上の無限小変形の理論へ拡張することができる．障害類をもつ例は下の例 1.20 に出てくる．$H^2(V,\Theta)=0$ であれば変形の障害類は存在しないことになる．このときは小平–Spencer によって倉西族の存在が倉西以前に証明されていた．

定理 1.16 $H^2(V,\Theta)=0$ であれば倉西族の底空間は次元 $\dim_{\mathbb{C}} H^1(V,\Theta)$ の複素多様体である． □

この定理から種数 $g\geqq 2$ のコンパクト Riemann 面 R の倉西空間は $3g-3$ 次元の複素多様体であることが分かる．

(e)　正則接ベクトル束に値をとる(0, 1)型式

さて，複素構造の変形を少し別の角度から見てみよう．以下，記号を簡単にするために $B=\{t\in\mathbb{C}^m \mid |t|<\varepsilon\}$ 上のコンパクト複素多様体の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{M}\to B$ を考え，複素多様体 $M=M_0=\pi^{-1}(0)$ を基準にして考える．B を定義するときに使った ε は十分小さいとする．

点 $t\in B$ 上のファイバー M_t は複素多様体であり，M と可微分同相である．したがって M_t は M を可微分多様体と考え，M とは異なる複素構造を入れたものとみることができる．M の座標近傍による開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を選ぶ．U_λ の局所座標を $(z_\lambda^1, z_\lambda^2, \cdots, z_\lambda^n)$ と記す．U_λ 上の C^∞ 関数 f は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\lambda^i}=0, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.19}$$

が成立するとき正則関数であり，かつ(1.19)が正則関数であることを特徴づける．では U_λ 上の C^∞ 関数 g が複素多様体 M_t の正則関数であるためにはどのような条件が必要とされるであろうか．M の局所座標を使って表現してみよう．M の局所座標 $(z_\lambda^1, z_\lambda^2, \cdots, z_\lambda^n)$ は M_t の複素多様体としての局所座標では一般にあり得ないので(1.19)と同様の式は期待できず，g が M_t の複素構造に関する正則関数であるための必要十分条件は

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_\lambda^j}=\sum_{i=1}^n \varphi_{\lambda,j}^i(t)\frac{\partial g}{\partial z_\lambda^i}, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{1.20}$$

と書くことができるであろう．$\varphi_{\lambda,j}^i(t)$ は $z_\lambda^1, \cdots, z_\lambda^n$ に関して C^∞ 関数であると考えられ，また $\varphi_{\mu,j}^i(0)=0$ でなければならない．$\varphi_{\mu,j}^i(t)$ がどのような性質をもつべきか見ておこう．

B を定義する ε を十分小さくとっておけば，$\{U_\lambda\times B\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathcal{M}$ の座標近傍による開被覆と考えることができる．$U_\lambda\times B$ の局所座標を $(\zeta_\lambda^1, \zeta_\lambda^2, \cdots, \zeta_\lambda^n, t_1, \cdots, t_m)$ と記す．ζ_λ^i は複素多様体 M で考えると，U_λ 上の C^∞ 関数であり，かつパラメータ $t=(t_1, \cdots, t_m)$ によって C^∞ 関数としての性質が変わってくる．そこで $\zeta_\lambda^i=\zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)$ と記すことにする．特に

$$\zeta_\lambda^i(z_\lambda, 0)=z_\lambda^i, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.21}$$

が成立するように ζ_λ^i をとることができる．$U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ のとき

$$\zeta_\lambda^i(z_\lambda, t) = g_{\lambda\mu}^i(\zeta_\mu(z_\mu, t), t), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.22}$$

が成立する．$g_{\lambda\mu}^i(\zeta_\mu, t)$ は $\zeta_\mu^1, \cdots, \zeta_\mu^n, t_1, \cdots, t_n$ の正則函数である．いささか分かりにくい表現であるが，M の局所座標との違いを強調するために以上のように $U_\lambda \times B$ の局所座標を表す．

さて，$\zeta_\lambda^k(z_\lambda, t)$ は M_t の複素構造で正則であるので(1.20)より

$$\frac{\partial \zeta_\lambda^k(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}_\lambda^j} = \sum_{i=1}^n \varphi_{\lambda, j}^i(t) \frac{\partial \zeta_\lambda^k(z_\lambda, t)}{\partial z_\lambda^i}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{1.23}$$

が成立する．(i, j) 成分が $\dfrac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}_\lambda^j}$，$\varphi_{\lambda, j}^i(t)$，$\dfrac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial z_\lambda^j}$ である行列をそれぞれ $A_\lambda(t)$, $\varPhi_\lambda(t)$, $B_\lambda(t)$ と記すと，上式は

$$A_\lambda(t) = B_\lambda(t)\varPhi_\lambda(t)$$

と書くことができる．また(1.21)より $B_\lambda(0)$ は単位行列であり，ε は十分小としたので，すべての $t \in B$ に対して $\det B_\lambda(t) \neq 0$ と仮定することができる．したがって

$$\varPhi_\lambda(t) = B_\lambda(t)^{-1} A_\lambda(t)$$

が成立する．行列成分を使って表示すれば

$$(\varphi_{\lambda, j}^i(t)) = \left(\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial z_\lambda^j} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}_\lambda^j} \right) \tag{1.24}$$

となる．

次に $U_\lambda \cap U_\mu \neq \varnothing$ のとき $(\varphi_{\lambda, j}^i(t))$ と $(\varphi_{\mu, j}^i(t))$ の関係を調べよう．(1.22)より

$$\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}_\mu^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{\lambda\mu}^i}{\partial \zeta_\mu^k} \frac{\partial \zeta_\mu^k(z_\mu, t)}{\partial \overline{z}_\mu^j}$$

$$\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial z_\mu^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{\lambda\mu}^i}{\partial \zeta_\mu^k} \frac{\partial \zeta_\mu^k(z_\mu, t)}{\partial z_\mu^j}$$

が成立する．したがって

$$\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}_\lambda^j} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}_\mu^l} \frac{\partial \overline{z}_\mu^l}{\partial \overline{z}_\lambda^j}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial \zeta^k_\mu} \frac{\partial \zeta^k_\mu(z_\mu, t)}{\partial \overline{z}^l_\mu} \frac{\partial \overline{z}^l_\mu}{\partial \overline{z}^j_\lambda}$$

が成立する．行列を使えば

$$\left(\frac{\partial \zeta^i_\lambda(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}^j_\lambda}\right) = \left(\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial \zeta^j_\mu}\right)\left(\frac{\partial \zeta^i_\mu(z_\lambda, t)}{\partial \overline{z}^l_\mu}\right)\left(\overline{\frac{\partial z^i_\mu}{\partial z^j_\lambda}}\right)$$

が成立する．同様に

$$\left(\frac{\partial \zeta^i_\lambda(z_\lambda, t)}{\partial z^j_\lambda}\right) = \left(\frac{\partial g^i_{\lambda\mu}}{\partial \zeta^j_\mu}\right)\left(\frac{\partial \zeta^i_\mu(z_\mu, t)}{\partial z^j_\mu}\right)\left(\frac{\partial z^i_\mu}{\partial z^j_\lambda}\right)$$

が成立し，(1.24)より $U_\lambda \cap U_\mu$ 上で

$$(\varphi^i_{\mu,j}(t)) = \left(\frac{\partial z^i_\mu}{\partial z^j_\lambda}\right)^{-1} (\varphi^i_{\mu,j}(t))\left(\overline{\frac{\partial z^i_\mu}{\partial z^j_\lambda}}\right) \tag{1.25}$$

が成立することが分かる．これは $U_\lambda \cap U_\mu$ 上で

$$\sum_{i,j} \varphi^i_{\lambda,j}(t) \frac{\partial}{\partial z^i_\lambda} \otimes d\overline{z}^j_\lambda = \sum_{i,j} \varphi^i_{\mu,j}(t) \frac{\partial}{\partial z^i_\mu} \otimes d\overline{z}^j_\mu$$

が成立することを意味する．したがって

$$\varphi(t) = \sum_{i,j} \varphi^i_{\lambda,j}(t) \frac{\partial}{\partial z^i_\lambda} \otimes d\overline{z}^j_\lambda \tag{1.26}$$

は M の正則ベクトル束 TM に値をとる M 上の C^∞ 級 $(0,1)$ 型式であることが分かる．

さて実際に $\varphi(t)$ が M_t の複素構造を与えることをみておこう．そのために M の開集合上定義された C^∞ 級函数 f に対して $\varphi(t)f$ を M 上の $(0,1)$ 型式

$$\varphi(t)f = \sum_{i,j} \varphi^i_{\lambda,j}(t) \frac{\partial f}{\partial z^i_\lambda} d\overline{z}^j_\lambda$$

と定義する．

補題 1.17　f が M_t 上の正則函数であるための必要十分条件は

$$\big(\overline{\partial} - \varphi(t)\big) f = 0$$

が成立することである．

［証明］　f が M_t 上の正則函数であるための必要十分条件は U_λ 上で $\zeta^i_\lambda = \zeta^i_\lambda(z_\lambda, t)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_\lambda^i} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

が成立することである．

一方，$(\overline{\partial} - \varphi(t))f = 0$ が成立することは

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\lambda^i} - \sum_{j=1}^n \varphi_{\lambda,i}^j(t) \frac{\partial f}{\partial z_\lambda^j} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.27}$$

が成立することと同値である．

$$\frac{\partial f}{\partial z_\lambda^i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \zeta_\lambda^k} \frac{\partial \zeta_\lambda^k}{\partial z_\lambda^i} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k} \frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k}{\partial z_\lambda^i}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\lambda^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \zeta_\lambda^k} \frac{\partial \zeta_\lambda^k}{\partial \overline{z}_\lambda^j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k} \frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k}{\partial \overline{z}_\lambda^j}$$

が成立するので(1.27)は

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \zeta_\lambda^k} \left(\frac{\partial \zeta_\lambda^k}{\partial \overline{z}_\lambda^j} - \sum_{i=1}^n \varphi_{\lambda,j}^i(t) \frac{\partial \zeta_\lambda^k}{\partial z_\lambda^i} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k} \left(\frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k}{\partial \overline{z}_\lambda^j} - \sum_{i=1}^n \varphi_{\lambda,j}^i(t) \frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k}{\partial z_\lambda^i} \right) = 0$$

と書き換えることができる．この式の第1項は(1.23)より0である．したがって(1.27)は

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k} \left(\frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k}{\partial \overline{z}_\lambda^j} - \sum_{i=1}^n \varphi_{\lambda,j}^i(t) \frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k}{\partial z_\lambda^i} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1.28}$$

と同値である．$t=0$ のとき $\varphi_{\lambda,j}^i(0) = 0$，$\left(\dfrac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^k}{\partial \overline{z}_\lambda^i} \right)$ は単位行列であるので，ε が十分小であれば行列

$$\left(\frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^i}{\partial \overline{z}_\lambda^j} - \sum_{k=1}^n \varphi_{\lambda,j}^k(t) \frac{\partial \overline{\zeta}_\lambda^i}{\partial z_\lambda^k} \right)$$

は可逆行列である．したがって(1.28)は

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_\lambda^k}=0, \quad k=1,2,\cdots,n$$

と同値である. ∎

さて TM に値をとる C^∞ 級 $(0,1)$ 型式 φ, ψ を U_λ 上で

$$\varphi=\sum \varphi_{\lambda,j}^i \frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \otimes d\bar{z}_\lambda^j, \quad \psi=\sum \psi_{\lambda,j}^i \frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \otimes d\bar{z}_\lambda^i$$

と記すとき $[\varphi, \psi]$ を

$$(1.29) \qquad [\varphi, \psi]=\sum_{i,j,k,l} \varphi_{\lambda,j}^i \frac{\partial \psi_{\lambda,l}^k}{\partial z_\lambda^i} \frac{\partial}{\partial z_\lambda^k} \otimes (d\bar{z}_\lambda^j \wedge d\bar{z}_\lambda^l) + \sum_{i,j,k,l} \psi_{\lambda,j}^i \frac{\partial \varphi_{\lambda,l}^k}{\partial z_\lambda^i} \frac{\partial}{\partial z_\lambda^k} \otimes (d\bar{z}_\lambda^j \wedge d\bar{z}_\lambda^l)$$

と定義すると $[\varphi, \psi]$ は TM に値をとる C^∞ 級 $(0,2)$ 型式であることが分かる. (1.26)で定義した $\varphi(t)$ に対して t を固定して $[\varphi(t), \varphi(t)]$ を定義すると, これは t に関して C^∞ 級であることが(1.29)より直ちに分かる. このとき次の定理が成立する.

定理 1.18　M_t の複素構造は M 上の TM に値をとる C^∞ 級 $(0,1)$ 型式 $\varphi(t)$ によって定まる. $\varphi(t)$ は以下の性質をもつ.

(1)　$\bar{\partial}\varphi(t)-\dfrac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)]=0$

(2)　$\varphi(0)=0$

(3)　$-\left.\dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial t_l}\right|_{t=0}$ は $H_{\bar{\partial}}^1(M, \Theta)$ の元を定め, $\pi\colon \mathcal{M} \to B$ の点 0 での接ベクトル $\dfrac{\partial}{\partial t_l} \in T_0 B$ の小平–Spencer 写像の像$\left(\rho\left(\dfrac{\partial}{\partial t_l}\right)\right)$である.

［証明］　$\varphi(t)$ が M_t の複素構造を定めることは補題 1.17 で示した. $\bar{\partial}-\varphi(t)$ は M_t の $\bar{\partial}$ 作用素であるので, M_t 上の任意の C^∞ 級函数 f に対して

$$(1.30) \qquad (\bar{\partial}-\varphi(t))\Big((\bar{\partial}-\varphi(t))f\Big)=0$$

が成立しなければならない. U_λ の局所座標 $(z_\lambda^1, z_\lambda^2, \cdots, z_\lambda^n)$ を使ってこの等式を具体的に表現してみよう.

$$(\overline{\partial}-\varphi(t))(f)=\overline{\partial}f-\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\varphi_{\lambda,j}^{k}(t)\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda}^{k}}\right)d\overline{z}_{\lambda}^{j}$$

が成立し，$\overline{\partial}^2 f=0$ であるので

$$\begin{aligned}
&(\overline{\partial}-\varphi(t))^2(f)\\
&=-\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi_{\lambda,i}^{l}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial z_{\lambda}^{l}\partial\overline{z}_{\lambda}^{j}}d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}\\
&\quad-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{\lambda,j}^{k}(t)}{\partial\overline{z}_{\lambda}^{i}}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda}^{k}}+\varphi_{\lambda,j}^{k}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}_{\lambda}^{i}\partial z_{\lambda}^{k}}\right)d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\sum_{k,l=1}^{n}\left(\varphi_{\lambda,i}^{l}(t)\frac{\partial\varphi_{\lambda,j}^{k}}{\partial z_{\lambda}^{l}}(t)\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda}^{k}}+\varphi_{\lambda,i}^{l}(t)\varphi_{\lambda,j}^{k}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial z_{\lambda}^{l}\partial z_{\lambda}^{k}}\right)\right\}d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}\\
&=-\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_{\lambda,i}^{k}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}_{\lambda}^{j}\partial z_{\lambda}^{l}}+\varphi_{\lambda,j}^{k}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial\overline{z}_{\lambda}^{i}\partial z_{\lambda}^{k}}\right)\right\}d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}\\
&\quad-\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{\lambda,j}^{k}(t)}{\partial\overline{z}_{\lambda}^{i}}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda}^{k}}\right)d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k,l=1}^{n}\varphi_{\lambda,i}^{l}(t)\frac{\partial\varphi_{\lambda,j}^{k}}{\partial z_{\lambda}^{l}}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda}^{k}}\right)d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k,l=1}^{n}\varphi_{\lambda,i}^{l}(t)\varphi_{\lambda,j}^{k}(t)\frac{\partial^2 f}{\partial z_{\lambda}^{l}\partial z_{\lambda}^{k}}\right)d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}
\end{aligned}$$

を得る．最後の式の第1項については(　)内は i,j に関して対称であり，$d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j}$ は i,j に関して反対称であるので，第1項は0である．同様の理由で第4項も0である．第2項は

$$-\overline{\partial}\varphi(t)=-\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_{\lambda,j}^{k}}{\partial\overline{z}_{\lambda}^{i}}\frac{\partial}{\partial z_{\lambda}^{k}}\otimes(d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j})$$

を f に作用させたものに他ならない．また(1.29)より

$$[\varphi(t),\varphi(t)]=2\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k,l=1}^{n}\varphi_{\lambda,i}^{l}(t)\frac{\partial\varphi_{\lambda,j}^{k}}{\partial z_{\lambda}^{l}}\frac{\partial}{\partial z_{\lambda}^{k}}\right)\otimes(d\overline{z}_{\lambda}^{i}\wedge d\overline{z}_{\lambda}^{j})$$

であるので，第3項は $\dfrac{1}{2}[\varphi(t),\varphi(t)]$ を f に作用させたものに他ならない．したがって

$$\left(\overline{\partial}-\varphi(t)\right)^2(f)=-\left(\overline{\partial}\varphi(t)-\frac{1}{2}[\varphi(t),\varphi(t)]\right)(f)$$

となり(1.30)が任意の C^∞ 函数 f に対して成立することから

$$\overline{\partial}\varphi(t)-\frac{1}{2}[\varphi(t),\varphi(t)]=0$$

が得られる．これで(1)が示された．また $\varphi(0)=0$ は $\varphi(t)$ の定義(1.24), (1.26)より明らかである．

さて，複素解析族 $\pi\colon \mathcal{M}\to B$ の原点0での無限小変形 $\rho\left(\dfrac{\partial}{\partial t_l}\right)$ はČech のコサイクル $\{\theta_{\lambda\mu}\}$

$$\theta_{\lambda\mu}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g^j_{\lambda\mu}}{\partial t_l}(z_\mu,0)\frac{\partial}{\partial z^j_\lambda}$$

で与えられる．また(1.22)より

$$\frac{\partial\zeta^j_\lambda}{\partial t_l}(z_\lambda,0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g^j_{\lambda\mu}}{\partial\zeta^k_\mu}(z_\mu,0)\frac{\partial\zeta^k_\mu}{\partial t_l}(z_\mu,0)+\frac{\partial g^j_{\lambda\mu}}{\partial t_l}(z_\mu,0)$$

そこで

$$\xi_\lambda=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\zeta^i_\lambda}{\partial t_l}(z_\mu,0)\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda},\quad \lambda\in\Lambda$$

とおくと ζ_λ は U_λ 上の M の複素構造に関する正則ベクトル場であり

$$\theta_{\lambda\mu}=\xi_\lambda-\xi_\mu$$

が成立する．すると

$$\overline{\partial}\xi_\lambda=\overline{\partial}\xi_\mu$$

が成立し，$\eta=-\overline{\partial}\xi_\lambda$ が $\{\theta_\lambda\}$ に対応する Dolbeault コホモロジー $\eta\in H^{0,1}_{\overline{\partial}}(M,\Theta)$ を表す．

$$\overline{\partial}\xi_\lambda=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\xi^i_\lambda}{\partial\overline{z}^j_\lambda\partial t_l}(z_\lambda,0)\frac{\partial}{\partial z^i_\lambda}\otimes d\overline{z}^j_\lambda$$

であるが，(1.24)より

$$\frac{\partial}{\partial t_l}(\varphi^i_{\lambda,j}(t))=\frac{\partial}{\partial t_l}\left\{\left(\frac{\partial\zeta^i_\lambda(z_\lambda,t)}{\partial z^j_\lambda}\right)^{-1}\right\}\left(\frac{\partial\zeta^i_\lambda(z_\lambda,t)}{\partial\overline{z}^i_\lambda}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda,t)}{\partial z_\lambda^j}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 \zeta_\lambda^i(z_\lambda,t)}{\partial \overline{z}_\lambda^j \partial t_l}\right)$$

を得，$t=0$ のとき

$$\left(\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda,t)}{\partial z_\lambda^j}\right)\Bigg|_{t=0} = I_n,$$

$$\left(\frac{\partial \zeta_\lambda^i(z_\lambda,t)}{\partial \overline{z}_\lambda^j}\right)\Bigg|_{t=0} = 0$$

であるので

$$\left(\frac{\partial \varphi_{\lambda,j}^i}{\partial t_l}(0)\right) = \left(\frac{\partial^2 \zeta_\lambda^i}{\partial \overline{z}_\lambda^j \partial t_l}(z_\lambda,0)\right)$$

を得る．したがって $\overline{\partial}\xi_\lambda = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_l}(0)$ となり

$$\eta = -\overline{\partial}\xi_\lambda = -\frac{\partial \varphi}{\partial t_l}(0)$$

を得る． ∎

以上の議論によって複素多様体 M に十分に近い変形は TM に値をとる C^∞ 級 $(0,1)$ 型式 ψ で

$$\overline{\partial}\psi - \frac{1}{2}[\psi,\psi] = 0$$

を満足するものによって記述できることが分かった．この逆が成立することを保証するのが Newlander–Nirenberg の定理である．TM に値をとる $(0,1)$ 型式 ψ が U_λ 上で

$$\psi = \sum_{i,j} \psi_{\lambda,j}^i \frac{\partial}{\partial z_\lambda^i} \otimes d\overline{z}_j$$

と書けるとき，U_λ 上の微分作用素 $L_{\lambda,j}^{(\psi)}$ を

$$L_{\lambda,j}^{(\psi)} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\lambda^j} - \sum_{i=1}^n \psi_{\lambda,j}^i \frac{\partial}{\partial z_\lambda^i}, \quad j=1,2,\cdots,n$$

と定義する．また $\overline{L}_{\lambda,j}^{(\psi)}$ を

$$\overline{L}_{\lambda,j}^{(\psi)} = \frac{\partial}{\partial z_\lambda^j} - \sum_{i=1}^n \overline{\psi_{\lambda,j}^i} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\lambda^i}$$

と定義する．

定理 1.19 (**Newlander–Nirenberg の定理**)　$L^{(\psi)}_{\lambda,j}, \overline{L}^{(\psi)}_{\lambda,j}$, $j=1,2,\cdots,n$ が各 $\lambda\in\Lambda$ で $\mathbb{C}$ 上 1 次独立であり

$$\overline{\partial}\psi-\frac{1}{2}[\psi,\psi]=0$$

が成立すれば ψ は M 上に複素構造 M_ψ を定める．M の開集合上の C^∞ 函数 f が複素構造 M_ψ に関する正則函数であるための必要十分条件は

$$L^{(\psi)}_{\lambda,j}(f)=0, \quad j=1,2,\cdots,n$$

で与えられる．　□

ψ が 0 に十分近ければ $L^{(\psi)}_{\lambda,j}$, $\overline{L}^{(\psi)}_{\lambda,j}$ は $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}^j_\lambda}$, $\dfrac{\partial}{\partial z^j_\lambda}$ に十分近く，したがって $\mathbb{C}$ 上 1 次独立であることが分かる．このようにして定理 1.18，定理 1.19 に基づいて M に十分近い複素構造の変形が記述できる．M の倉西族の存在は $H^1(M,\Theta)\simeq\mathbb{C}^m$ のとき原点の近くで $(t_1,\cdots,t_m)$ に関して解析的な TM に値をとる $(0,1)$ 型式 $\varphi(t)$ を構成し，さらに

$$\overline{\partial}\varphi(t)-\frac{1}{2}[\varphi(t),\varphi(t)]=0 \iff t\in S$$

が成立するような原点の近傍での解析的部分空間 S の存在を示すことによって証明することができる．このとき $\varphi(t)$ を使って S 上に M の倉西族が構成できる．S の原点での Zariski 接空間は $H^1(M,\Theta)$ と同型であることも示すことができる．

ところで定理 1.18 より $\eta\in H^1(M,\Theta)$ が M の複素解析族の無限小変形であれば $[\eta,\eta]\in H^2(M,\Theta)$ は 0 であることが示されたことに注意しておこう．これは定理 1.18 で

$$\eta_l=\rho\left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right), \quad j=1,2,\cdots,m$$

とおくと

$$\eta_j=-\left.\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_j}\right|_{t=0}$$

であり

$$\overline{\partial}\left(\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t_i\partial t_j}\right)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t_i\partial t_j}\bigg|_{t=0}, \varphi(0)\right] + \left[\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_i}\bigg|_{t=0}, \frac{\partial\varphi(t)}{\partial t_j}\bigg|_{t=0}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\varphi(0), \frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t_i\partial t_j}\bigg|_{t=0}\right] = [\eta_i, \eta_j]$$

であるので $[\eta_i, \eta_j]$ が定める $H^2_{\overline{\partial}}(M, \Theta)$ のコホモロジー類は 0 であることによる．これは定理 1.15 からも明らかである．

例 1.20　m 次元複素トーラス T と射影直線 $\mathbb{P}^1$ との直積 $M=T\times\mathbb{P}^1$ を考える．このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \Theta_M) = m^2+3m$$

である．$\mathbb{P}^1$ の非斉次座標を ζ と記すと

$$\psi = \sum_{j=1}^{m}(a_j\zeta^2+b_j\zeta+c_j)\frac{\partial}{\partial\zeta}\otimes d\overline{z}_k$$

は $H^{0,1}_{\overline{\partial}}(M, \Theta)$ の元を表す．簡単な計算により

$$[\psi, \psi] = \sum_{j<k}\{(b_ja_k-b_ka_j)\zeta^2+2(c_ja_k-c_ka_j)\zeta+(c_jb_k-c_kb_j)\}d\overline{z}_j\wedge d\overline{z}_k$$

を得る．$m\geqq 2$ のとき

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m & b_m & c_m \end{pmatrix} \geqq 2$$

であれば $[\psi, \psi]\neq 0$ であり ψ は障害類であることが分かる．□

§1.2　ベクトル束の無限小変形

以下，コンパクト複素多様体 M 上の複素 Lie 群 G の複素解析的な**主束**(以下 G 主束(principal G-bundle)と呼ぶ)を考察する．簡単のため，G は $GL(N, \mathbb{C})$ の閉部分群として実現されているとし，G の各元は $N\times N$ 行列であるとして議論する．

解析空間 S に対して $M\times S$ 上の G 主束 $\tilde{\omega}\colon \mathcal{P}\to M\times S$ を S をパラメータ空間とする **G 主束の複素解析族**(analytic family of G-bundle parameterized by S)と呼ぶ．各点 $s\in S$ に対して $\mathcal{P}$ の $M\times\{s\}$ 上への制限 $P_s=\mathcal{P}|M\times\{s\}$ は M 上の G 主束とみることができる．特に $s_0\in S$ に対して $P=P_{s_0}$ であるとき，$\tilde{\omega}\colon \mathcal{P}\to M\times S$ を M 上の G 主束 P の**変形**であるという．

さて，点 $s_0\in S$ に対して $P=P_{s_0}$ の無限小変形，より正確には小平–Spencer 写像をどのように定義したらよいであろうか．複素構造の変形の場合，小平–Spencer 写像の行き先は $H^1(M,\Theta)$ であったが G 主束の変形のときはどのようなコホモロジー群を考えたらよいのであろうか．答えは複素構造の変形の類似として G 主束 $\pi\colon P\to M$ の1次の変形を考えればよいことが分かる．

M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $P|U_\Lambda\simeq U_\Lambda\times G$ であるようにとろう．すると G 主束 P は変換函数 $\{g_{\lambda\mu}\}$ で与えられる．$g_{\lambda\mu}$ は $U_{\lambda\mu}=U_\lambda\cap U_\mu\neq\varnothing$ から G への正則写像であり

(1.31) $$g_{\mu\lambda}(z)=g_{\lambda\mu}^{-1}(z),\quad z\in U_{\lambda\mu}$$

を満足し，かつ $U_{\lambda\mu\nu}=U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu\neq\varnothing$ のとき

(1.32) $$g_{\lambda\nu}(z)=g_{\lambda\mu}(z)g_{\mu\nu}(z),\quad z\in U_{\lambda\mu\nu}$$

を満足する．逆に(1.31)，(1.32)を満足する G への正則写像 $\{g_{\lambda\nu}\}$ が与えられたとき $U_\lambda\times G$ と $U_\mu\times G$ を $U_{\lambda\mu}\times G$ 上で $(z,g)\in U_\lambda\times G$ と $(z,h)\in U_\mu\times G$ とを

$$(z,g)=(z,g_{\lambda\mu}(z)h),\quad z\in U_{\lambda\mu},\quad g,h\in G$$

のとき同一視することによって M 上の G 主束が構成できる．

問2　M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して G への正則写像からなる変換函数 $\{g_{\lambda\mu}\},\{h_{\lambda\mu}\}$ が複素解析的に同型(ただし M 上では恒等写像である同型)な G 主束を与えるための必要十分条件は

$$g_{\lambda\mu}=g_\lambda^{-1}h_{\lambda\mu}g_\mu$$

を満足する U_λ から G への正則写像 g_λ がすべての $\lambda\in\Lambda$ に対して存在することであることを示せ．

そこで変換函数 $\{g_{\lambda\mu}\}$ を双対数 ε を使って1次の無限小だけ拡大する．$g_{\lambda\mu}$ は $U_{\lambda\mu}$ から $G\subset GL(N,\mathbb{C})$ への正則写像であったので，新しい変換函数 $\widetilde{g}_{\lambda\mu}$ は

$$\widetilde{g}_{\lambda\mu}=g_{\lambda\mu}(1+\varepsilon X_{\lambda\mu})$$

と書くことができる．ここで $X_{\lambda\mu}$ は $U_{\lambda\mu}$ 上の正則函数を成分とする $N\times N$ 行列であり，U_μ の座標を使って表現しているものと考える．さらに $\{\widetilde{g}_{\lambda\mu}\}$ が $M\times\mathrm{Specan}\,\mathbb{C}[t]/(t^2)$ 上の主束を定義するためには $X_{\lambda\mu}(z)$ は G の Lie 代数の元でなければならないことが分かる．$\{\widetilde{g}_{\lambda\mu}\}$ が G 主束を定めるためには

$$\widetilde{g}_{\mu\lambda}(z)=\widetilde{g}_{\lambda\mu}^{-1}(z),\quad z\in U_{\lambda\mu} \tag{1.33}$$

$$\widetilde{g}_{\lambda\nu}(z)=\widetilde{g}_{\lambda\mu}(z)\widetilde{g}_{\mu\nu}(z),\quad z\in U_{\lambda\mu\nu} \tag{1.34}$$

を満足しなければならない．(1.33)より

$$\begin{aligned}g_{\mu\lambda}(1+\varepsilon X_{\mu\lambda})&=\{g_{\lambda\mu}(1+\varepsilon X_{\lambda\mu})\}^{-1}\\&=(1-\varepsilon X_{\lambda\mu})g_{\lambda\mu}^{-1}=(1-\varepsilon X_{\lambda\mu})g_{\mu\lambda}\end{aligned}$$

が成立し，これより

$$X_{\mu\lambda}=-g_{\mu\lambda}^{-1}X_{\lambda\mu}g_{\mu\lambda}=-g_{\lambda\mu}X_{\lambda\mu}g_{\lambda\mu}^{-1}=-\,\mathrm{ad}(g_{\lambda\mu})(X_{\lambda\mu}) \tag{1.35}$$

が成り立つことが分かる．単純に $X_{\mu\lambda}=-X_{\lambda\mu}$ とならないのは $X_{\mu\lambda}$ は $U_\lambda\times G$ で $X_{\lambda\mu}$ は $U_\mu\times G$ で考えており，両者を比較するためには同一の座標で考える必要があることによる．また(1.34)より

$$\begin{aligned}g_{\lambda\nu}(1+\varepsilon X_{\lambda\nu})&=g_{\lambda\mu}(1+\varepsilon X_{\lambda\mu})g_{\mu\nu}(1+X_{\mu\nu})\\&=g_{\lambda\mu}g_{\mu\nu}+\varepsilon g_{\lambda\mu}X_{\lambda\mu}g_{\mu\nu}+\varepsilon g_{\lambda\mu}g_{\mu\nu}X_{\mu\nu}\\&=g_{\lambda\nu}\{1+\varepsilon(g_{\mu\nu}^{-1}X_{\lambda\mu}g_{\mu\nu}+X_{\mu\nu})\}\end{aligned}$$

が成立し，これより

$$X_{\lambda\nu}=g_{\mu\nu}^{-1}X_{\lambda\mu}g_{\mu\nu}+X_{\mu\nu}=\mathrm{ad}(g_{\nu\mu})(X_{\lambda\mu})+X_{\mu\nu} \tag{1.36}$$

が成立することが分かる．

さて，G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ と記すとき G の $\mathfrak{g}$ への**随伴表現**(adjoint representation) ad を使って G 主束 P から $\mathfrak{g}$ をファイバーとするファイバー束

$\mathrm{ad}(P) = P \underset{\mathrm{ad}}{\times} \mathfrak{g}$ を定義することができる．P が変換函数 $\{g_{\lambda\mu}\}$ から構成されているときは $\mathrm{ad}(P)$ は $U_{\lambda\mu}$ 上で，$(z,X) \in U_\lambda \times \mathfrak{g}$，$(z,Y) \in U_\mu \times \mathfrak{g}$ を

$$(z,X) = (z,\ \mathrm{ad}(g_{\lambda\mu}(z))Y) = (z,\ g_{\lambda\mu}(z)Y g_{\lambda\mu}(z)^{-1})$$

と同一視することによって構成できる．すると(1.35)，(1.36)より $\{X_{\lambda\mu}\}$ は $H^1(M, \mathrm{ad}(P))$ の元を定めることが分かる．

また以上の考察より，小平–Spencer 写像をどのように定義したらよいかも明らかであろう．

G 主束 $\tilde{\omega}\colon \mathcal{P} \to M \times S$ に対して，$s_0 \in S$ の近傍 V と M の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を適当にとると $\tilde{\omega}^{-1}(V) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times V$ に関して制限 $\mathcal{P}|U_\lambda \times V$ は自明な G 主束 $U_\lambda \times V \times G$ であるようにできる．したがって $\tilde{\omega}^{-1}(V)$ 上では $\mathcal{P}$ は変換函数 $\{g_{\lambda\mu}(z_\mu, s)\}$ によって定義されていると考えることができる．接ベクトル $\theta \in T_{s_0}S$ に対して $\theta(g_{\lambda\mu}(z_\mu, s))|_{s=s_0}$ ($g_{\lambda\mu}(z_\mu, s)$ は $N \times N$ 行列と考えて各成分を θ で微分して $s = s_0$ とおいたもの)を $\theta(g_{\lambda\mu})(z_\mu, s_0)$ と略記することにして $U_{\lambda\mu} \neq \varnothing$ のとき

$$X_{\lambda\mu}(z_\mu) = g_{\lambda\mu}(z_\mu, s_0)^{-1}\theta(g_{\lambda\mu})(z_\mu, s_0)$$

と定義する．$X_{\lambda\mu}(z_\mu)$ は $U_{\lambda\mu}$ 上の $\mathfrak{g}$ 値正則函数である．$U_{\lambda\mu\nu} \neq \varnothing$ のとき

$$g_{\lambda\nu}(s) = g_{\lambda\mu}(s)g_{\mu\nu}(s)$$

が成立する．両辺に θ を作用させて(右辺の積は行列の積であるので)

$$\theta(g_{\lambda\mu})(s_0) = \theta(g_{\lambda\mu})(s_0)g_{\mu\nu}(s_0) + g_{\lambda\mu}(s_0)\theta(g_{\mu\nu})(s_0)$$

を得る．この両辺に $g_{\lambda\nu}(s_0)^{-1}$ を掛け，$g_{\lambda\nu}(s_0)^{-1} = g_{\mu\nu}(s_0)^{-1}g_{\lambda\mu}(s_0)^{-1}$ に注意すると

$$X_{\lambda\mu} = g_{\mu\nu}(s_0)^{-1}X_{\lambda\mu}g_{\mu\nu} + X_{\mu\nu}$$

を得る．これは(1.36)に他ならないので $\{X_{\lambda\mu}\}$ は $H^1(M, \mathrm{ad}(P_{s_0}))$，$P_{s_0} = \mathcal{P}|M \times \{s_0\}$ の元を定める．θ に対して $\{X_{\lambda\mu}\}$ が定める $H^1(M, \mathrm{ad}(P_{s_0}))$ の元を対応させる写像

$$\rho\colon\ T_{s_0}S \longrightarrow H^1(M, \mathrm{ad}(P_{s_0}))$$

が小平–Spencer 写像である．M 上の G 主束の複素解析族に対しても倉西族の存在を示すことができる．

《要約》

1.1　複素解析族の定義とコンパクト複素多様体の変形.

1.2　コンパクト複素多様体 M の変形の 1 次近似は無限小変形と呼ばれ, $H^1(M, \Theta)$ の元で記述できる.

1.3　小平–Spencer 写像の定義.

1.4　完備な解析族と倉西族の定義および小平–Spencer 写像による特徴づけ.

1.5　コンパクト複素多様体 M の倉西族の底空間は倉西空間と呼ばれ, M に対応する点での Zariski 接空間は $H^1(M, \Theta)$ である.

1.6　変形の障害類は $H^2(M, \Theta)$ の元で与えられる.

1.7　$H^2(M, \Theta) = 0$ であれば倉西空間は $\dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \Theta)$ の複素多様体である.

1.8　コンパクト複素多様体 M 上の複素 Lie 群の主束 P の無限小変形は $H^1(M, \mathrm{ad}(P))$ の元で与えられる.

2 Torelliの定理

この章では閉 Riemann 面に関する Torelli の定理を複素解析的観点から証明する．Torelli の定理は閉 Riemann 面 R の Jacobi 多様体 $J(R)$ から R が一意的に定まることを主張する定理である．より正確には，Jacobi 多様体 $J(R)$ と閉 Riemann 面から標準的に定まるその上のテータ因子 Θ の組 $(J(R), \Theta)$ によって R が一意的に定まることを主張する．正則同型でない閉 Riemann 面 R_1, R_2 に対してその Jacobi 多様体 $J(R_1), J(R_2)$ が複素トーラスとして同型であることが起こり得る．しかしこの場合はテータ因子との組 $(J(R_1), \Theta_1)$ と $(J(R_2), \Theta_2)$ とは同型ではない．組 $(J(R), \Theta)$ は $J(R)$ に主偏極構造を入れることを意味し，$(J(R), \Theta)$ を考えることは $J(R)$ を主偏極 Abel 多様体と考えることと同値である．したがって本章では§2.1で Abel 多様体の偏極構造を議論し，偏極 Abel 多様体のモジュライ空間を複素解析的に構成する．偏極 Abel 多様体を考えることは $\mathbb{Z}$ 上定義された偏極1次 Hodge 構造を考えることと同値である．したがって§2.1の議論は偏極1次 Hodge 構造を幾何学化した議論であるということができる．ただし，歴史的には逆で，Jacobi 多様体の理論が Hodge 構造を考えるきっかけを与えている．また偏極構造を考えないとモジュライ空間は複素解析空間としては構成できないことを注意しておこう．

続いて§2.2では閉 Riemann 面 R の Jacobi 多様体 $J(R)$ を構成し，$J(R)$ は自然な主偏極構造をもつことを示す．これは $H^1(R, \mathbb{C})$ に導入される偏極

Hodge構造と本質的に一致する．

ところで主偏極構造を与えたJacobi多様体は閉Riemann面を一意的に定めるので，閉Riemann面のモジュライ空間は主偏極Abel多様体のモジュライ空間の中に含まれていると考えることができる．g次元主偏極Abel多様体のモジュライ空間の次元は$\dfrac{g(g+1)}{2}$次元であり，一方，種数gの閉Riemann面のモジュライ空間の次元は$g=1$のとき1次元，$g \geqq 2$のとき$3g-3$次元である．両者の次元が一致するのは$g=1,2,3$のときにすぎないが，$g=2$のときでも2次元主偏極Abel多様体は種数2の閉Riemann面のJacobi多様体とは限らない．

このように閉Riemann面のモジュライ空間は主偏極Abel多様体のモジュライ空間より複雑な構造をもっていることが推察される．

§2.3ではまず，Andreotti [2]によるTorelliの定理の証明を簡単に紹介する．この証明は幾何学的で分かりやすいが，反面きちんとした証明をするためには細部を詰めるための準備が必要となる．また，超楕円曲線とそうでない場合とを区別して議論する必要がある．そのため，本書ではMartens [64]のアイディアに基づいたTorelliの定理の証明を与える．この証明はテータ因子と主偏極との関係さえ証明できれば，あとは純代数幾何学的理論となり，正標数の場合にもそのまま取り扱える利点がある一方で，一見幾何学的ではない難点がある．しかし，この議論は代数曲線の特殊因子の理論とも関係し，さらに代数曲線の幾何学的な深い議論を可能にする．

閉Riemann面のTorelliの定理はモジュライ理論の出発点になった定理であるので特にその証明を記すことにした．なお，本章ではRiemann面R上の因子Dに対して記号

$$l(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(R, \mathcal{O}_R(D))$$

を用い，因子Dが定める完備1次系を$|D|$と記し，またRiemann面Rの標準因子をK_RまたはKと記す．

§2.1　複素トーラスと Abel 多様体

(a)　複素トーラス

g 次元複素ベクトル空間 V の階数 $2g$ の格子 Λ による商空間 V/Λ は g 次元コンパクト複素多様体であり g 次元**複素トーラス**(complex torus)と呼ばれる．以下，特にことわらない限り，ベクトル空間 V の基底を固定し，V の元を横ベクトル $(z_1, z_2, \cdots, z_g)$ で表す．さらに Λ の生成元 $(a_{i1}, \cdots, a_{ig})$，$i=1, 2, \cdots, 2g$ を縦に並べて $2g\times g$ 行列 Ω を作ることができる．この行列を複素トーラス T の**周期行列**(period matrix)と呼ぶ．逆に $2g\times g$ 行列 Ω の各行からなる横ベクトルが生成する V の部分加群 Λ が階数 $2g$ の V の格子であるための必要十分条件は

$$\det(\Omega, \overline{\Omega}) \neq 0 \tag{2.1}$$

が成立することである．このとき $2g\times g$ 行列 Ω に対して格子 Λ は一意的に定まる．V/Λ を以下 $T_\Omega = \mathbb{C}^g/\Omega$ と記す．$H_1(T, \mathbb{Z})$ は Λ と同一視できることに注意する．ところで Λ と Ω との対応は 1 対 1 ではない．条件(2.1)を満足する二つの $2g\times g$ 行列 Ω_1, Ω_2 が同じ格子を定義するための必要十分条件は

$$\Omega_1 = M\Omega_2, \quad M \in GL(2g, \mathbb{Z}) \tag{2.2}$$

が成立することである．さらに複素トーラス V_1/Λ_1，V_2/Λ_2 間の正則写像は V_1 から V_2 への線型写像と V_2/Λ_2 の平行移動の合成で得られる．したがって複素トーラス $T_1 = V/\Lambda_1$ と $T_2 = V/\Lambda_2$ とが複素多様体として同型であるための必要十分条件は

$$f(\Lambda_1) = \Lambda_2$$

となる同型な線型写像 $f\colon V \to V$ が存在することである．V の基底を固定すれば f は $GL(g, \mathbb{C})$ の元として表現できる．以上の考察によって次のことが示されたことになる．

命題 2.1　g 次元複素トーラス $T_{\Omega_1} = \mathbb{C}^g/\Omega_1$ と T_{Ω_2} とが複素解析的に同型であるための必要十分条件は

$$\Omega_1 = M\Omega_2 A \tag{2.3}$$

を満足する

$$M \in GL(2g, \mathbb{Z}), \quad A \in GL(g, \mathbb{C})$$

が存在することである. □

(2.4)
$$\mathfrak{M} = \{\Omega \mid \Omega \text{ は } 2g \times g \text{ 行列}, \ \det(\Omega, \overline{\Omega}) \neq 0\}$$

とおくと M に左から $GL(2g, \mathbb{Z})$ が, 右から $GL(g, \mathbb{C})$ が作用する. 命題 2.1 により g 次元複素トーラスの同型類は商集合

(2.5)
$$\mathfrak{T}_g = GL(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{M} / GL(g, \mathbb{C})$$

の1点を定め, 逆に $\mathfrak{T}_g$ の各点は g 次元複素トーラスの同型類を定める. したがって $\mathfrak{T}_g$ によい構造(たとえば複素解析空間の構造)が入れば, $\mathfrak{T}_g$ は g 次元複素トーラスのモジュライ空間と呼ぶにふさわしいものである. しかし, 以下に示すように $\mathfrak{T}_g$ は $g \geqq 2$ のときは Hausdorff 空間にもならず, よい構造をもち得ないことが分かる.

$\mathfrak{T}_g$ の構造を調べるために, まず $\mathfrak{T}_g$ の各元は

$$\begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}, \quad \det(\operatorname{Im} \tau) \neq 0$$

の形の $2g \times g$ 行列で代表されることに注意しよう. I_g は $g \times g$ 単位行列で(2.1)より $\operatorname{rank} \Omega = g$ であるので, g 個の行を適当に選んでできる $g \times g$ 行列が正則行列であるようにできる. 行の並べ替えは $GL(2g, \mathbb{Z})$ の元を左から掛けることによってできるので, $\Omega = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$, $\det \tau_2 \neq 0$ と仮定することができる. この行列に右から τ_2^{-1} を掛けることによって $\begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}$ の形の行列になる.

さらに $\begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \tau' \\ I_g \end{pmatrix}$ とが同型な複素トーラスを定めるための必要十分条件は

(2.6)
$$\tau' = (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1},$$

かつ

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2g, \mathbb{Z})$$

である $g \times g$ 整数係数行列 A, B, C, D が存在することである.

$$\mathcal{T} = \{\tau \mid \tau \text{ は } g\times g \text{ 行列}, \ \det(\mathrm{Im}\,\tau) \neq 0\}$$

とおき，$\mathcal{T}$ の同値関係 $\sim$ を(2.6)で定義する．$GL(2g,\mathbb{Z})$ は $\mathcal{T}$ には作用していないことに注意する．

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2g,\mathbb{Z})$$

に対して $\det(C\tau+D)\neq 0$ のとき M の τ への作用を $M\cdot\tau = (A\tau+B)(C\tau+D)^{-1}$ と定義する．これによって同値関係が定義され，商空間 $\mathcal{T}/\sim$ は集合として $\mathfrak{T}_g$ と同型であるのみならず，商位相を入れた位相空間として $\mathfrak{T}_g$ と同型である．特に $\tau = \sqrt{-1}\,I_g$ のとき $A\in GL(g,\mathbb{Z})$ に対して

$$\tau = A\tau A^{-1}, \quad \tau = -A\tau^{-1}A^{-1}$$

が成立するので $M\in GL(2g,\mathbb{Z})$ が

$$\text{(2.7)} \qquad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad A\in GL(g,\mathbb{Z})$$

の形をしていれば

$$M\cdot\tau = \tau$$

であることが分かる．このような M は $g\geqq 2$ のとき無限個あるので $\mathcal{T}/\sim$ の商位相は Hausdorff ではないことが分かる．

以上の議論をきちんとするためには，$GL(2g,\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{M}/GL(g,\mathbb{C})$ への作用を考えればよい．$\mathfrak{M}/GL(g,\mathbb{C})$ は複素多様体の構造をもち $\left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix} \,\middle|\, \tau\in\mathcal{T} \right\}$ は座標近傍の一つである．このとき ${}^t(\sqrt{-1}\,I_g, I_g)$ の定める $\mathfrak{M}/GL(g,\mathbb{C})$ の点での $GL(2g,\mathbb{Z})$ の作用に関する固定部分群は(2.7)の形の元を含んでおり，$g\geqq 2$ のとき無限群である．したがって $GL(2g,\mathbb{Z})$ の $\mathfrak{M}/GL(g,\mathbb{C})$ への作用は $g\geqq 2$ のとき真性不連続ではなく，商空間 $GL(2g,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{M}/GL(g,\mathbb{C})$ は Hausdorff 空間ではない．

注意 2.2　例 1.4 で示したように $\mathcal{T}$ 上には複素トーラスの複素解析的族を構成することができ，この族は $\mathcal{T}$ の各点で普遍的な倉西族である．

次に複素トーラス $T = T_\Omega = \mathbb{C}^g/\Omega$ の Picard 多様体について考察する．層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_T \stackrel{\exp(2\pi\sqrt{-1}*)}{\longrightarrow} \mathcal{O}_T^* \longrightarrow 0$$

よりコホモロジー群の完全列

$$\longrightarrow H^1(T,\mathbb{Z}) \stackrel{\iota}{\longrightarrow} H^1(T,\mathcal{O}_T) \longrightarrow H^1(T,\mathcal{O}_T^*) \stackrel{c}{\longrightarrow} H^2(T,\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

を得る．$\mathrm{Ker}\, c \simeq H^1(T,\mathcal{O}_T)/\iota(H^1(T,\mathbb{Z}))$ は複素トーラスの構造をもち，複素トーラス T の **Picard 多様体**(Picard variety)と呼ばれ $\mathrm{Pic}^0(T)$ と記される．$H^1(T,\mathcal{O}_T)$ は Dolbeault コホモロジーを使うとその基底として

$$\omega_j = d\overline{z}_j, \quad j=1,2,\cdots,g$$

をとることができる．ただし $(z_1,z_2,\cdots,z_g)$ は $\mathbb{C}^g$ の座標とする．このとき $H_1(T,\mathbb{Z})$ の基底を $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ と記し，T 上で

$$\int_{\alpha_i}\omega_j = \tau_{ij}, \quad \int_{\beta_i}\omega_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leqq i,j \leqq g$$

が成立するように $\mathbb{C}^g$ の座標と $H_1(T,\mathbb{Z})$ の基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ を選んでおく．ここで δ_{ij} は $i\neq j$ のとき 0，$i=j$ のとき 1 を表す．$\tau=(\tau_{ij})$ とおくと T の周期行列は $\begin{pmatrix}\tau\\ I_g\end{pmatrix}$ である．

命題 2.3　$\Omega=\begin{pmatrix}\tau\\ I_g\end{pmatrix}$，$T_\Omega=\mathbb{C}^g/\Omega$ のとき

$$\mathrm{Pic}^0(T_\Omega)\simeq \mathbb{C}^g/\Omega^*, \quad \Omega^*=\begin{pmatrix}{}^t\tau\\ I_g\end{pmatrix}$$

が成立する．ただし ${}^t\tau$ は τ の転置行列である．

［証明］ de Rham コホモロジーを考えることにより，$\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g,\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2,\cdots,\overline{\omega}_g\}$ は $H^1(T,\mathbb{C})$ の基底とみることができる．$H^1(T,\mathbb{Z})$ の基底として $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ の双対基底 $\{\alpha_1^*,\cdots,\alpha_g^*,\beta_1^*,\cdots,\beta_g^*\}$ をとる．このとき

$$\alpha_i^* = \sum_{j=1}^g a_{ij}\overline{\omega}_j + \sum_{j=1}^g \overline{a}_{ij}\omega_j,$$

$$\beta_i^* = \sum_{j=1}^g b_{ij}\overline{\omega}_j + \sum_{j=1}^g \overline{b}_{ij}\omega_j, \quad i=1,\cdots,g$$

と書くと

$$\begin{aligned}\delta_{ik} &= \langle \alpha_k, \alpha_i^* \rangle = \sum_{j=1}^{g} a_{ij} \int_{\alpha_k} \overline{\omega}_j + \sum_{j=1}^{g} \overline{a}_{ij} \int_{\alpha_k} \omega_j \\ &= \sum_{j=1}^{g} (a_{ij}\overline{\tau}_{kj} + \overline{a}_{ij}\tau_{kj}) \\ 0 &= \langle \beta_k, \alpha_i^* \rangle = \sum_{j=1}^{g} a_{ij} \int_{\beta_k} \overline{\omega}_j + \sum_{j=1}^{g} \overline{a}_{ij} \int_{\beta_k} \omega_j \\ &= a_{ik} + \overline{a}_{ik}\end{aligned}$$

を得る．同様に β_i^* に関して

$$0 = \langle \alpha_k, \beta_i^* \rangle = \sum_{j=1}^{g} (b_{ij}\overline{\tau}_{kj} + \overline{b}_{ij}\tau_{kj})$$

$$\delta_{ik} = \langle \beta_k, \beta_i^* \rangle = b_{ik} + \overline{b}_{ik}$$

を得る．$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ とおくと以上の結果は

$$\begin{pmatrix} A & \overline{A} \\ B & \overline{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\overline{\tau} & I_g \\ {}^t\tau & I_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_g & 0 \\ 0 & I_g \end{pmatrix}$$

と書くことができる．したがって

$$\begin{pmatrix} A & \overline{A} \\ B & \overline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\overline{\tau} & I_g \\ {}^t\tau & I_g \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Y & Y \\ -{}^t\tau Y & -{}^t\overline{\tau} Y \end{pmatrix}$$

$$Y = (2\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,{}^t\tau)^{-1}$$

となる．すなわち $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ -{}^t\tau \end{pmatrix} Y$ となる．よって

$$H^1(T, \mathcal{O}_T)/H^1(Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^g \Big/ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \simeq \mathbb{C}^g \Big/ \begin{pmatrix} I_g \\ -{}^t\tau \end{pmatrix} = \mathbb{C}^g \Big/ \begin{pmatrix} {}^t\tau \\ I_g \end{pmatrix}$$

となる． ∎

この命題により，特に ${}^t\tau = \tau$ であれば $\mathrm{Pic}^0(T_\Omega)$ と T_Ω とは同型であることが分かる．後述するように T_Ω が主偏極 Abel 多様体であればこの条件が満たされる．

(b)　Abel 多様体

複素射影空間 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ に複素部分多様体として埋め込むことのできる g 次元

複素トーラスをg次元**Abel多様体**(Abelian variety)と呼ぶ．複素トーラスがAbel多様体であるための条件を求めよう．そのために複素トーラス$T=\mathbb{C}^g/\Omega$上の複素直線束(以下，直線束としばしば略記する)について復習する．複素トーラスT上の直線束Lを自然な正則写像$p\colon \mathbb{C}^g\to T$によって$\mathbb{C}^g$上に引き戻した$p^*L$は$\mathbb{C}^g$上の直線束である．$\mathbb{C}^g$上の直線束は自明なものに限るので同型

$$p^*L\simeq \mathbb{C}^g\times\mathbb{C} \tag{2.8}$$

が存在する．以下，この同型を固定し$p^*L=\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$と考える．$2g\times g$行列$\Omega$の各行が生成する$\mathbb{C}^g$の格子を$\Lambda$と記す．複素トーラス$T$は$\mathbb{C}^g$上への$\Lambda$の作用による商多様体であり，$T$上の直線束$L$も$\Lambda$の作用による商多様体として実現することができる．$\lambda\in\Lambda$の$\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$への作用は

$$\begin{array}{rccc}\lambda\colon & \mathbb{C}^g\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^g\times\mathbb{C}\\ & (z,\zeta) & \longmapsto & (z+\lambda, j(\lambda,z)\zeta)\end{array} \tag{2.9}$$

と書くことができる．$j(\lambda,z)$は$\mathbb{C}^g$上の正則函数であり$\lambda,\lambda'\in\Lambda$に対して

$$j(\lambda+\lambda',z)=j(\lambda',z+\lambda)\cdot j(\lambda,z) \tag{2.10}$$

が成立する．さらに(2.8)の同型は零になることのない$\mathbb{C}^g$上の正則函数$u(z)$を掛けることによって底空間$\mathbb{C}^g$上では恒等写像であるような新しい同型を作ることができる．この新しい同型を使えば(2.9)の$j(\lambda,z)$は

$$j'(\lambda,z)=u(z+\lambda)j(\lambda,z)u(z)^{-1} \tag{2.11}$$

に変換される．言い換えると$j(\lambda,z)$と(2.11)の$j'(\lambda,z)$はT上同型な直線束を定める．したがって(2.11)を使ってできるだけ簡明な形の$j(\lambda,z)$を見出すことが問題になる．次の定理はその答えである．

定理2.4(**Appell–Humbertの定理**)　複素トーラス$T=\mathbb{C}^g/\Lambda$上の直線束Lに対して次の性質をもつ$\mathbb{C}^g$上のHermite型式$H(z,w)$と写像$\chi\colon\Lambda\to U(1)=\{t\in\mathbb{C}\mid |t|=1\}$が一意的に定まる．

(A.1)　$A(z,w)$を$H(z,w)$の虚部とすると，任意の$\lambda,\lambda'\in\Lambda$に対して

$$A(\lambda,\lambda')\in\mathbb{Z}$$

(A.2)　$\chi(\lambda+\lambda')=\chi(\lambda)\chi(\lambda')e^{\pi\sqrt{-1}A(\lambda,\lambda')},\quad \lambda,\lambda'\in\Lambda$

((A.2)の性質をもつ $\chi\colon \Lambda \to U(1)$ を**半指標**(semi-character)という.)

逆に上の(A.1), (A.2)の性質をもつ Hermite 型式 $H(z,w)$ と半指標 $\chi\colon \Lambda \to U(1)$ に対して

$$j(\lambda, z) = \chi(\lambda)\exp\left\{\pi H(z,\lambda) + \frac{\pi}{2}H(\lambda,\lambda)\right\}$$

と定義し，(2.9)によって Λ の $\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$ への作用を定義すると $L(H,\chi) = \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}/\Lambda$ は T 上の直線束であり，H,χ が対応する Hermite 型式，半指標である. □

証明については小林[53]の定理 8.7 を参照されたい.

定理の条件(A.1), (A.2)を満足する Hermite 型式と半指標の組 (H_1,χ_1), (H_2,χ_2) が与えられたとき

(2.12) $$L(H_1,\chi_1)\otimes L(H_2,\chi_2) = L(H_1+H_2, \chi_1\chi_2)$$

であることが容易に分かる．したがって (H_1,χ_1) と (H_2,χ_2) に対して積を

$$(H_1,\chi_1)\cdot(H_2,\chi_2) = (H_1+H_2, \chi_1\chi_2)$$

で定義すると Abel 群の同型

(2.13)
$$H^1(T,\mathcal{O}_T^*) \simeq \{(H,\chi) \mid \text{定理 2.4 の(A.1), (A.2)を満足する } (H,\chi)\}$$

ができる．Hermite 型式

$$H = \sum_{i,j} h_{i\bar{j}} z^i \overline{w}^j$$

に対して $(1,1)$ 型式

(2.14) $$c(H) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum h_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

を作ると，H が上の定理の条件(A.1)を満足すれば Hodge 分解(定理 3.1)より

(2.15) $$c(H) \in H^2(T,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(T)$$

であることが分かる．すなわち $c(H)$ は直線束 $L(H,\chi)$ の 1 次 Chern 類(the first Chern class)を表す．このことから

$$\mathrm{Pic}^0(T) \simeq \mathrm{Hom}(\Lambda, U(1)) \tag{2.16}$$

であることが分かる．ただし Hom は群の準同型写像である．Hermite 型式 0 に対応する半指標は Abel 群 Λ の指標に他ならないことに注意する．$\chi \in \mathrm{Hom}(\Lambda, U(1))$ に対して $L(0,\chi) \in \mathrm{Pic}^0(T)$ である．

定理 2.5 複素トーラス $T=\mathbb{C}^g/\Lambda$ 上の直線束 $L(H,\chi)$ が豊富であるための必要十分条件は Hermite 型式 $H(z,w)$ が正定値であることである． □

この定理は小平の埋め込み定理(小林[53]の定理 7.13 参照)の直接の帰結である．この定理より次の重要な系を得る．

系 2.6 複素トーラス $T=\mathbb{C}^g/\Lambda$ が Abel 多様体であるための必要十分条件は，$\mathbb{C}^g$ 上に次の条件を満足する正定値 Hermite 型式 $H(z,w)$ が存在することである．

(A.1) $H(z,w)$ の虚部 $A(z,w)$ に関して

$$A(\lambda,\lambda') \in \mathbb{Z}, \quad \lambda, \lambda' \in \Lambda$$ □

系 2.6 を周期行列 Ω の言葉を使って書き直すと次の重要な結果を得る．

定理 2.7 複素トーラス $T=\mathbb{C}^g/\Omega$ が Abel 多様体であるための必要十分条件は

(P.1) ${}^t\Omega E^{-1}\Omega=0$

(P.2) $\sqrt{-1}\,{}^t\Omega E^{-1}\overline{\Omega}>0$

を満足する整数係数歪対称行列 E (${}^tE=-E$ であり，各成分が整数である行列)が存在することである．

［証明］ 周期行列 Ω の j 行を γ_j とおくと，$\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}$ は格子 Λ を生成する．行列 E をその (i,j) 成分 e_{ij} が $H(\gamma_i,\gamma_j)$ の虚部

$$\begin{aligned} e_{ij} = A(\gamma_i,\gamma_j) &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(H(\gamma_i,\gamma_j)-\overline{H(\gamma_i,\gamma_j)}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(H(\gamma_i,\gamma_j)-H(\gamma_j,\gamma_i)) \end{aligned}$$

であると定義する．最後の表示より E は歪対称行列であることが分かり，系 2.6 より $e_{ij}\in\mathbb{Z}$ である．$H=(h_{ij})$，$H(z,w)=zH\,{}^t\overline{w}$ と記すと

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\Omega H\,{}^t\overline{\Omega} - \overline{\Omega}\,\overline{H}\,{}^t\Omega) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\Omega H\,{}^t\overline{\Omega} - \overline{\Omega}\,{}^tH\,{}^t\Omega) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\Omega \ \ \overline{\Omega})\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -{}^tH \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t\overline{\Omega} \\ {}^t\Omega \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成立し

$$
(\Omega \ \ \overline{\Omega})^{-1}E\begin{pmatrix} {}^t\overline{\Omega} \\ {}^t\Omega \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -{}^tH \end{pmatrix} \tag{2.17}
$$

であることが分かる．したがって

$$
\frac{1}{2\sqrt{-1}}\begin{pmatrix} {}^t\overline{\Omega} \\ {}^t\Omega \end{pmatrix}E^{-1}(\Omega \ \ \overline{\Omega}) = \begin{pmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & -{}^tH^{-1} \end{pmatrix}
$$

が成立し，これより

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\sqrt{-1}}{}^t\overline{\Omega}E^{-1}\Omega = H^{-1} \\
&\frac{1}{2\sqrt{-1}}{}^t\Omega E^{-1}\overline{\Omega} = -{}^tH^{-1} \\
&{}^t\Omega E^{-1}\Omega = 0
\end{aligned}
\right. \tag{2.18}
$$

を得る．H は正定値 Hermite 行列であるので ${}^tH^{-1}$ も正定値 Hermite 行列であり，これより $\sqrt{-1}\,{}^t\Omega E^{-1}\overline{\Omega} > 0$ であることが分かる． ∎

この定理の条件(P.1)，(P.2)は **Riemann の条件**(Riemann's condition)と呼ばれる．閉 Riemann 面の周期行列が満足すべき条件として Riemann が初めて見出したものである．次章で述べるように(P.1)，(P.2)は複素トーラス T の 1 次元コホモロジー群 $H^1(T,\mathbb{Z})$ の Hodge 構造が偏極 Hodge 構造をもつことを意味している．

さて複素トーラス $T=\mathbb{C}^g/\Omega$ の周期行列が生成する格子 Λ の基底をとり直すことによって，行列 $E=(A(\gamma_i,\gamma_j))$ は

$$E=\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_g \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

$$d_i\in\mathbb{Z},\ d_i>0,\quad d_1|d_2|\cdots|d_g$$

であるように選ぶことができる(Frobenius の定理，単因子論の簡単な帰結である)．(2.19)の形の標準形を与える格子 Λ の基底 $\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{2g}\}$ を**シンプレクティック基底**(symplectic basis)という．E が(2.17)の標準形であるとき条件(P.1), (P.2)を具体的に調べてみよう．周期行列を

$$\Omega=\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$

と二つの $g\times g$ 行列に分けて(P.1), (P.2)を書き下すと

$$\begin{aligned} {}^t\Omega_2\Delta^{-1}\Omega_1-{}^t\Omega_1\Delta^{-1}\Omega_2&=0 \\ \sqrt{-1}\left({}^t\Omega_2\Delta^{-1}\overline{\Omega}_1-{}^t\Omega_1\Delta^{-1}\overline{\Omega}_2\right)&>0 \end{aligned}$$

を得る．これより $\det\Omega_2\neq 0$ であることを示そう．

$$\Omega_2\xi=0$$

となる g 次元縦ベクトルを考える．すると

$$\sqrt{-1}\,{}^t\xi\left({}^t\Omega_2\Delta^{-1}\overline{\Omega}_1-{}^t\Omega_1\Delta^{-1}\overline{\Omega}_2\right)\overline{\xi}=0$$

が成立するが，$\sqrt{-1}\left({}^t\Omega_2\Delta^{-1}\overline{\Omega}_1,-{}^t\Omega_1\Delta^{-1}\overline{\Omega}_2\right)$ は正定値 Hermite 行列であるので $\xi=0$ でなければならない．これは $\det\Omega_2\neq 0$ を意味する．そこで Ω の右から Ω_2^{-1} を掛ける(これは $\mathbb{C}^g$ の基底を変換することに対応する)と周期行列は

$$\widetilde{\Omega}=\begin{pmatrix} \widetilde{\tau} \\ I_g \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

に変わる．このとき(2.18), (2.19)は両側から Δ を掛けることによって

$$\begin{aligned} \widetilde{\tau}\Delta-\Delta{}^t\widetilde{\tau}&=0 \\ \sqrt{-1}\left(\overline{\widetilde{\tau}}\Delta-\Delta{}^t\widetilde{\tau}\right)&>0 \end{aligned}$$

となる．$\tau=\tilde{\tau}\Delta$ とおくと，これは

$$(2.21)\qquad \begin{cases} {}^t\tau=\tau \\ \operatorname{Im}\tau>0 \end{cases}$$

と書き換えることができる．(2.21)の形の周期行列を周期の標準形と呼ぶ．(2.21)を満足する $g\times g$ 複素行列の全体を $\mathfrak{S}_g$ と記し，g 次 **Siegel 上半空間** (Siegel upper half plane) という．$g=1$ のときは $\mathfrak{S}_1$ は上半平面 H に他ならない．(2.20)は

$$(2.22)\qquad \begin{pmatrix} \tau\Delta^{-1} \\ I_g \end{pmatrix}, \quad \tau\in\mathfrak{S}_g$$

と書くことができる．

ところで $2g\times 2g$ 歪対称行列 E を(2.19)の標準形にする格子 Λ のシンプレクティック基底のとり方は実は無数にある．シンプレクティック基底 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}\}$ に対して他の基底は $GL(2g,\mathbb{Z})$ の元 M を使って $\{(\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g})M\}$ で与えられ，これがシンプレクティック基底であるためには行列 M に関して

$$(2.23)\qquad ME\,{}^tM=E$$

が成立することが必要十分条件である．

(2.24)

$$Sp(\Delta,\mathbb{Z})=\left\{M\in GL(2g,\mathbb{Z})\;\middle|\; M\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}{}^tM=\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

とおくと $Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ は群をなす．特に $\Delta=I_g$ のときは $Sp(I_g,\mathbb{Z})$ を $Sp(2g,\mathbb{Z})$ と記し，g 次の**整シンプレクティック群**(integral symplectic group)あるいは **Siegel モジュラー群**(Siegel modular group)という．$Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ は**パラモジュラー群**(paramodular group)と呼ばれる．

ところで，E が標準形(2.19)になるような格子 Λ の基底，すなわちシンプレクティック基底 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g}\}$ の選び方によって標準形(2.20)，(2.22)の $\tilde{\tau}=\tau\Delta^{-1}$ は様々な形をとる．$M\in Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ によって $\tilde{\Omega}=\begin{pmatrix} \tilde{\tau} \\ I_g \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} \tilde{\tau}' \\ I_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\tilde{\tau}+\beta)(\gamma\tilde{\tau}+\delta)^{-1} \\ I_g \end{pmatrix}$$

に移る．ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は M を $g\times g$ 行列の四つのブロックに分けたもの

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

である．$\tilde{\tau}$ は $\tau\Delta^{-1}$, $\tau\in\mathfrak{S}_g$ と書けるので $\tilde{\tau}'=\tau'\Delta^{-1}$, $\tau'\in\mathfrak{S}_g$ と記すと

$$\tau' = (\alpha\tau+\beta\Delta)(\gamma\tau+\delta\Delta)^{-1}\Delta \tag{2.25}$$

となることも直ちに分かる．

(2.24)の定義で $\mathbb{Z}$ のかわりに $\mathbb{R}$ をとって

(2.26)

$$Sp(\Delta,\mathbb{R}) = \left\{ M\in GL(2g,\mathbb{R}) \,\middle|\, M\begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

と定義すると群 $Sp(\Delta,\mathbb{R})$ は(2.25)によって g 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ に作用する．この作用で $\mathfrak{S}_g$ は $Sp(\Delta,\mathbb{R})$ の等質空間であることが分かっている．$Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ は $Sp(\Delta,\mathbb{R})$ の離散部分群であるが，次の重要な事実が成立する．

定理 2.8　離散群 $Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ は $\mathfrak{S}_g$ に真性不連続に作用する．　□

この定理は基本領域を具体的に構成することによって証明される(Siegel [83])．$g=1$ のときの基本領域は多くの本に出ているが，$g\geqq 2$ のときは $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{S}_g=\dfrac{1}{2}g(g+1)\geqq 3$ であるので基本領域を図示するのは難しい．

定理 2.8 によって商空間 $Sp(\Delta,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$ は解析空間であることが分かる．この空間は Abel 多様体のモジュライ空間を表しているように見える．しかし歪対称行列 E あるいは Δ は Abel 多様体によって変わってくるから，$Sp(\Delta,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$ はすべての Abel 多様体のモジュライ空間となることはできない．

定理 2.7 の証明で述べたように歪対称行列 E は $\mathbb{C}^g$ 上の Hermite 型式 $H(z,w)$ の虚部 $A(z,w)$ と格子 Λ の基底 $\{(\gamma_1,\cdots,\gamma_{2g})\}$ から $E=(A(\gamma_i,\gamma_j))$ として定まった．このとき E が(2.19)の標準形であり，周期行列が(2.20)の $\tilde{\Omega}=\begin{pmatrix} \tilde{\tau} \\ I_g \end{pmatrix}$ で与えられているとすれば $\{\gamma_{g+1},\gamma_{g+2},\cdots,\gamma_{2g}\}$ が $\mathbb{C}$ 上のベクトル

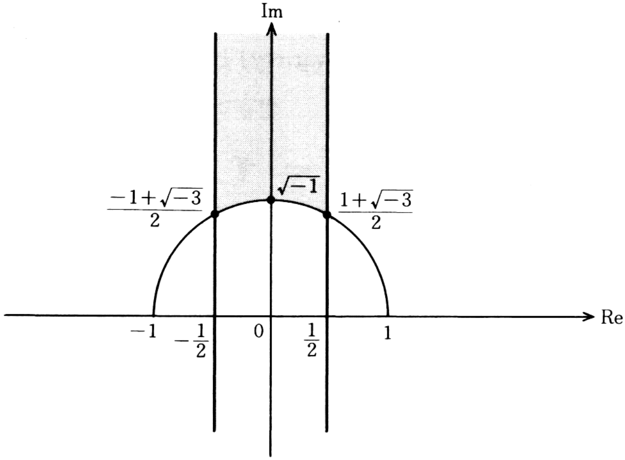


図 2.1　$g=1$ のときの $Sp(2,\mathbb{Z})=SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域

空間 $\mathbb{C}^g$ の基底となり，Hermite 型式 $H(z,w)$ は(2.18)によって与えられる．すなわち $h_{ij}=H(\gamma_{g+i},\gamma_{g+j})$，$H=(h_{ij})$ とおくと

$$H^{-1}=\Delta^{-1}(\operatorname{Im}\tau)\Delta^{-1}$$

を得，

$$H(z,w)=z\Delta(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\Delta\,{}^t\overline{w} \tag{2.27}$$

であることが分かる．

$\mathbb{C}^g$ の基底として $\left\{\frac{1}{d_1}\gamma_{g+1},\frac{1}{d_2}\gamma_{g+2},\cdots,\frac{1}{d_g}\gamma_{2g}\right\}$ をとると周期行列は

$$\begin{pmatrix}\tau\\ \Delta\end{pmatrix},\quad \tau\in\mathfrak{S}_g \tag{2.28}$$

となり Hermite 型式は

$$H(z,w)=z(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\,{}^t\overline{w} \tag{2.29}$$

になる．(2.28)の形は周期行列の標準形としてよく使われる．

このように Abel 多様体 $T=\mathbb{C}^g/\Omega$ の周期行列 Ω を $\begin{pmatrix}\tau\Delta^{-1}\\ I_g\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}\tau\\ \Delta\end{pmatrix}$，$\tau\in\mathfrak{S}_g$ と記すと，$\mathbb{C}^g$ 上の Hermite 型式が(2.27)または(2.29)で定まり，性質(A.1)をもつことが分かる．このとき $L=L(H,\chi)$ は T 上の豊富な直

線束である．Abel 多様体 T と T 上の豊富な直線束の組 (T,L) の同値類を**偏極 Abel 多様体**(polarized Abelian variety)という．ここで $(T,L_1),(T,L_2)$ は T の点 a による平行移動

$$\begin{array}{rccc} t_a\colon & T & \longrightarrow & T \\ & x & \longmapsto & x+a \end{array}$$

によって

$$t_a^*L_1 \simeq L_2$$

となるとき同値であると定義する．Abel 多様体 T 上の豊富な直線束 L_1, L_2 は定理 2.4 より $L_1=L(H_1,\chi_1)$, $L_2=L(H_2,\chi_2)$ と表すことができるので，次の定理により (T,L_1) と (T,L_2) とが同値であるための必要十分条件は L_1, L_2 に対応する Hermite 型式 H_1, H_2 が一致することであることが分かる．すなわち Abel 多様体 $T=\mathbb{C}^g/\Omega$ 上の偏極構造と(A.1)を満足する $\mathbb{C}^g$ 上の Hermite 型式 H とが1対1に対応することが分かる．さらに Hermite 型式は正規化した周期行列 $\begin{pmatrix} \tau\Delta^{-1} \\ I_g \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \tau \\ \Delta \end{pmatrix}$, $\tau\in\mathfrak{S}_g$ によって(2.27)または(2.29)によって一意的に定まる．これはまた Hermite 型式 H の虚部 A の正規化した行列表示(2.19)を与えることと同値である．したがって Abel 多様体 $T=\mathbb{C}^g/\Omega$ の偏極構造は行列

$$\Delta=\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_g \end{pmatrix}, \quad d_i\in\mathbb{Z},\ i=1,\cdots,g,\ d_1|d_2|\cdots|d_g,\ d_i\geqq 1$$

と1対1に対応していることが分かる．このことを Abel 多様体は **Δ 型の偏極構造**をもつ，あるいは **$(d_1,d_2,\cdots,d_g)$ 型の偏極構造**をもつという．また，この Abel 多様体を **Δ 偏極 Abel 多様体**(Δ-polarized Abelian variety)，あるいは **$(d_1,d_2,\cdots,d_g)$ 型の偏極 Abel 多様体**(polarized Abelian variety of type $(d_1,d_2,\cdots,d_g)$)という．特に $d_1=d_2=\cdots=d_g=1$ のとき**主偏極 Abel 多様体**(principally polarized Abelian variety)という．

先へ進む前に上で使った定理を述べておく．複素トーラス T 上の直線束 L と点 $a \in T$ に対して $(t_a^*L) \otimes L^{-1}$ は次数 0 の直線束であり，したがって $\mathrm{Pic}^0(T)$ の点を定める．よって写像

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_L: & T & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(T) \\ & a & \longmapsto & (t_a^*L) \otimes L^{-1} \end{array} \tag{2.30}$$

が定義できる．この写像は群の準同型写像であり，また正則写像であることを示すことができる．

定理 2.9　$L(H_1, \chi_1) = t_a^*L(H_2, \chi_2)$ となるための必要十分条件は $H_1 = H_2$ となることである．さらに Abel 多様体 T 上の直線束 L が豊富であれば $\varphi_L: T \to \mathrm{Pic}^0(T)$ は全射である．　□

(2.16) により T 上の次数 0 の直線束は指標 $\chi \in \mathrm{Hom}(\Lambda, U(1))$ によって $L(0, \chi)$ の形に表示することができる．定理 2.9 は L が豊富であれば $L(0, \chi) = (t_a^*L) \otimes L^{-1}$ となるように点 $a \in T$ を見出すことができることを示している．このときさらに $\mathrm{Ker}\, \varphi_L$ は有限群であることを示すことができる．

さて $(d_1, d_2, \cdots, d_g)$ 型の偏極 Abel 多様体 $T = \mathbb{C}^g / \Omega$ は正規化した周期行列

$$\Omega = \begin{pmatrix} \tau \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathfrak{S}_g$$

で与えられ，逆に周期行列がこの形をしていれば $T = \mathbb{C}^g / \Omega$ は $(d_1, d_2, \cdots, d_g)$ 型の偏極構造をもつ．また

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(\Delta, \mathbb{Z})$$

に対して

$$\tau' = (\alpha\tau + \beta\Delta)(\gamma\tau + \delta\Delta)^{-1}\Delta$$

とおくと $T = \mathbb{C}^g \Big/ \begin{pmatrix} \tau \\ \Delta \end{pmatrix}$ と $T' = \mathbb{C}^g \Big/ \begin{pmatrix} \tau' \\ \Delta \end{pmatrix}$ とは同型な $(d_1, d_2, \cdots, d_g)$ 型偏極 Abel 多様体である．同型写像は

$$\psi_M:\quad T=\mathbb{C}^g\Big/\begin{pmatrix}\tau\\ I_g\end{pmatrix} \longrightarrow T'=\mathbb{C}^g\Big/\begin{pmatrix}\tau'\\ I_g\end{pmatrix}$$
$$[z]=[(z_1,\cdots,z_g)] \longmapsto [z(\gamma\tau+\delta\Delta)^{-1}] \tag{2.31}$$

によって与えられる．以上によって次の定理が示されたことになる．

定理 2.10　商空間 $\mathcal{A}_\Delta=Sp(\Delta,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$ と $(d_1,d_2,\cdots,d_g)$ 型偏極 Abel 多様体の同型類とは1対1に対応する． □

この意味で $\mathcal{A}_\Delta=Sp(\Delta,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$ は $(d_1,d_2,\cdots,d_g)$ 型偏極 Abel 多様体のモジュライ空間とみることができる．$Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ は $\mathfrak{S}_g$ 上に固定点をもち，$\mathcal{A}_\Delta=Sp(\Delta,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$, $g\geqq 2$ のとき $\mathcal{A}_\Delta$ は特異点をもつ**正規解析空間**(normal analytic space)であることが知られている．

正整数 n に対して

$$\Gamma_\Delta(n)=\{M\in Sp(\Delta,\mathbb{Z})\mid M\equiv I_{2g}\pmod n\} \tag{2.32}$$

とおくと，$\Gamma_\Delta(n)$ は $Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ の位数有限の正規部分群である．このとき次の重要な結果が成立する．

命題 2.11　$n\geqq 3$ であれば $\Gamma_\Delta(n)$ は $\mathfrak{S}_g$ 上に固定点をもたない． □

この命題によって $n\geqq 3$ のとき，$\mathcal{A}_\Delta(n)=\Gamma_\Delta(n)\backslash\mathfrak{S}_g$ は複素多様体であることが分かる．複素多様体 $\mathcal{A}_\Delta(n)$ はモジュライ空間と考えることができるであろうか．$(d_1,d_2,\cdots,d_g)$ 型偏極 Abel 多様体 (T,L) に対して T の n 等分点のなす群の生成元

$$\left[\frac{1}{n}\lambda_1\right],\ \left[\frac{1}{n}\lambda_2\right],\ \cdots,\ \left[\frac{1}{n}\lambda_{2g}\right]$$

を考える．ここで λ_j は $T=\mathbb{C}/\Lambda$ の格子 Λ の元とする．$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2g}\}$ が Λ のシンプレクティック基底であるとき，

$$\left\{\left[\frac{1}{n}\lambda_1\right],\ \left[\frac{1}{n}\lambda_2\right],\ \cdots,\ \left[\frac{1}{n}\lambda_{2g}\right]\right\}$$

を n 等分点のなす群のシンプレクティック生成元と呼ぶ．(生成元の順序も問題になっていることに注意する．) $(d_1,d_2,\cdots,d_g)$ 型偏極 Abel 多様体 (T,L) と n 等分点のなす群のシンプレクティック生成元の組

$$\left(T,\,L,\,\left\{\left[\frac{1}{n}\lambda_1\right],\,\left[\frac{1}{n}\lambda_2\right],\,\cdots,\,\left[\frac{1}{n}\lambda_{2g}\right]\right\}\right)$$

を $(d_1, d_2, \cdots, d_g)$ 型偏極 Abel 多様体の**レベル n 構造**(level n-structure)と呼ぶ．このとき次の命題が成立する．

命題 2.12　$n \geqq 1$ のとき $\mathcal{A}_\Delta(n)$ は $(d_1, d_2, \cdots, d_g)$ 型偏極 Abel 多様体のレベル n 構造のモジュライ空間である．　□

$n \geqq 3$ のときは $\mathcal{A}_\Delta(n)$ 上にレベル n 構造の普遍族を次のようにして構成できる．$\mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$ 上に $\mathbb{Z}^{2g}$ の作用を

$$\begin{array}{rccc} (m,n)\colon & \mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g & \longrightarrow & \mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g \\ & (\tau,\zeta) & \longmapsto & (\tau,\zeta+m\tau+n\Delta) \end{array}$$

$$m = (m_1, \cdots, m_g),\ n = (n_1, \cdots, n_g),\ (m,n) \in \mathbb{Z}^{2g}$$

と定義する．商空間 $\mathcal{F} = \mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$ は複素多様体である．点 $(\tau,\zeta) \in \mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$ の定める $\mathcal{F}$ の点を $(\tau,[\zeta])$ と記す．自然な写像

$$\begin{array}{rccc} p\colon & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_g \\ & (\tau,[\zeta]) & \longmapsto & \tau \end{array}$$

は固有かつ滑らかな正則写像であり，$p\colon \mathcal{F} \to \mathfrak{S}_g$ は $(d_1, d_2, \cdots, d_g)$ 型偏極 Abel 多様体の解析的族である．さらに $\mathcal{F}$ 上に $Sp(\Delta, \mathbb{Z})$ が

$$(\tau,[\zeta]) \longmapsto ((\alpha\tau+\beta\Delta)(\gamma\tau+\delta\Delta)^{-1}\Delta,\ [\zeta(\gamma\tau+\delta\Delta)^{-1}])$$

で作用する．特に $n \geqq 3$ であれば $\Gamma_\Delta(n)$ は $\mathfrak{S}_g$ 上に固定点をもたないので，$\mathcal{F}$ への作用は固定点をもたない．したがって $\mathcal{F}(n) = \Gamma_\Delta(n)\backslash\mathcal{F}$ は複素多様体であり，正則写像 p は正則写像 $\pi\colon \mathcal{F}(n) \to \mathcal{A}_\Delta(n) = \Gamma_\Delta(n)\backslash\mathfrak{S}_g$ を導く．$\tau \in \mathfrak{S}_g$ に対応する $\mathcal{A}_\Delta(n)$ の点を $[\tau]$ と記すと，$[\tau]$ 上のファイバー $\pi^{-1}([\tau])$ はレベル n 構造

$$\left(\mathbb{C}^g\Big/\begin{pmatrix}\tau\\ \Delta\end{pmatrix},\ L(H,0),\ \left\{\frac{1}{n}\gamma_1, \cdots, \frac{1}{n}\gamma_{2g}\right\}\right)$$

の同型類に他ならない．$\pi\colon \mathcal{F}(n) \to \mathcal{A}_\Delta(n)$ は $(d_1, d_2, \cdots, d_g)$ 型偏極 Abel 多様体のレベル n 構造の普遍族である．

ところで $\mathcal{A}_\Delta, \mathcal{A}_\Delta(n)$ は**擬射影多様体**(quasiprojective variety)であることが知られている．また $\mathcal{A}_\Delta, \mathcal{A}_\Delta(n)$ の幾何学的に自然なコンパクト化として**佐武コンパクト化**(Satake compactification) $\overline{\mathcal{A}}_\Delta, \overline{\mathcal{A}}_\Delta(n)$ が知られている．佐武コンパクト化によって $\overline{\mathcal{A}}_\Delta, \overline{\mathcal{A}}_\Delta(n)$ は射影多様体になる．$g \geqq 2$ のときは付け加えた境界の点でこれらの射影多様体は特異点をもつことも知られている．

(c)　テータ函数

$\mathfrak{S}_g$ の点 τ に関して

$$\theta(\tau, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2} l\tau\, {}^t l + l\, {}^t z\right) \tag{2.33}$$

とおく．ただし $\boldsymbol{e}(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$ とおいた．$\theta(\tau, z)$ は $\mathbb{C}^g$ で広義一様収束し，$\mathbb{C}^g$ 上の正則函数を定める．また τ も変数と考えると，$\theta(\tau, z)$ は $\mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$ で広義一様収束し，$\mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$ 上の正則函数を定める．τ を固定したとき，$\theta(\tau, z)$ を **Riemann のテータ函数**(Riemann's theta function)と呼ぶ．$\theta(\tau, z)$ は擬周期性

$$\theta(\tau, z+n'\tau+n'') = \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2} n'\tau\, {}^t n' - n'\, {}^t(z+n'')\right)\theta(\tau, z), \tag{2.34}$$

$$n' = (n'_1, \cdots, n'_g),\ n'' = (n''_1, \cdots, n''_g) \in \mathbb{Z}^g$$

をもつ．

主偏極 Abel 多様体 $T = \mathbb{C}^g \Big/ \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}$ に対して $\theta(\tau, z)$ は複素直線束 $L(H, 1)$ の正則切断と“実質的に”考えることができることを示そう．Hermite 型式 $H(z, w)$ は(2.29)より

$$H(z, w) = z(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}\, {}^t\overline{w}$$

で与えられる．そこで $\mathbb{C}^g$ 上の対称双線型型式 $S(z, w)$ を

$$S(z, w) = z(\mathrm{Im}\,\tau)^{-1}\, {}^t w \tag{2.35}$$

で定義する．すると

$$\text{(2.36)}\quad \begin{cases} \pi H(z, n'\tau+n'') - \pi S(z, n'\tau+n'') = -2\pi\sqrt{-1}\, n'\, {}^t z \\ \pi H(n'\tau+n'', n'\tau+n'') - \pi S(n'\tau+n'', n'\tau+n'') \\ \qquad\qquad = -2\pi\sqrt{-1}\, n'(\tau\, {}^t n' + {}^t n'') \end{cases}$$

が成立する．

$$\text{(2.37)}\qquad \theta_0(\tau, z) = \exp\left(\frac{\pi}{2} S(z, z)\right)$$

とおくとこれは $\mathbb{C}^g$ 上の正則函数であり(2.34), (2.36)より

$$\text{(2.38)}\qquad g(z) = \theta_0(\tau, z)\theta(\tau, z)$$

に関して

$$g(z+\lambda) = \exp\left(\pi\sqrt{-1}\, n'\, {}^t n'' + \pi H(z, \lambda) + \frac{\pi}{2} H(\lambda, \lambda)\right) g(z), \qquad \lambda = n'\tau + n''$$

が成立する．これは定理2.4より $g(z)$ が $L(H, \chi_0)$ の正則切断であることを意味する．ここで $\chi_0(\lambda) = e^{\pi\sqrt{-1}n'\,{}^t n''}$ である．$\theta_0(\tau, z)$ も T 上のある直線束 L_0 の正則切断と考えることができるが，$\theta_0(\tau, z)$ は $\mathbb{C}^g$ 上で0になることがないので，L_0 は自明な直線束と同型である．したがって直線束 $L(H, \chi_0)$ と $L(H, \chi_0) \otimes L_0^{-1}$ とは同型であり，$\theta(\tau, z)$ を考察することと，$g(z)$ を考察することは同値であることが分かる．

以下では主としてテータ函数 $\theta(\tau, z)$ を考えるが，これはテータ函数のもつ擬周期性(2.34)の方が直線束 $L(H, \chi_0)$ より定まる擬周期性より取り扱いやすいことによる．

さて $m = (m_1, \cdots, m_g) \in \mathbb{R}^g$，$m^* = (m_1^*, \cdots, m_g^*) \in \mathbb{R}^g$ に対して**テータ指標** (theta characteristic) (m, m^*) のテータ函数 $\theta\begin{bmatrix} m \\ m^* \end{bmatrix}(\tau, z)$ ($\theta_{m, m^*}(\tau, z)$ と書くことも多い)を

$$\text{(2.39)}\quad \theta\begin{bmatrix} m \\ m^* \end{bmatrix}(\tau, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}(l+m)\tau\, {}^t(l+m) + (l+m)\, {}^t(z+m^*)\right)$$

によって定義する．$n', n'' \in \mathbb{Z}^g$ に対して

$$\text{(2.40)}\qquad \theta\begin{bmatrix} m \\ m^* \end{bmatrix}(\tau, z+n'\tau+n'')$$

$$= \boldsymbol{e}\left(-\frac{1}{2}n'\tau\,{}^t n' - n'\,{}^t z\right)\cdot \boldsymbol{e}(m\,{}^t n'' - n'\,{}^t m^*)\theta\begin{bmatrix} m \\ m^* \end{bmatrix}(\tau, z)$$

が成立する．

$$\chi(n'\tau + n'') = \boldsymbol{e}(m\,{}^t n'' - n'\,{}^t m^*)$$

とおくと，χ は Λ から $U(1)$ への指標となり，$\theta\begin{bmatrix} m \\ m^* \end{bmatrix}(\tau, z)$ は $L(H, \chi_0)\otimes L(0, \chi)\otimes L_0^{-1}$ の正則切断と考えることができる．$L(H, \chi_0)\otimes L(0, \chi) = L(H, \chi_0\chi)$ であることに注意する．さらに

$$\theta\begin{bmatrix} m \\ m^* \end{bmatrix}(\tau, z) = \boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}m\tau\,{}^t m + m\,{}^t(z+m^*)\right)\theta(\tau,\ z+m\tau+m^*) \tag{2.41}$$

が成立することが分かる．(2.41)の右辺の最初の項は $\mathbb{C}^g$ で 0 にならないので $\theta(\tau,\ z+m\tau+m^*)$ を T 上の直線束 $L(H, \chi)\otimes L_1$ の正則切断とみると L_1 は自明な直線束であることが分かる．これより主偏極 Abel 多様体のとき定理 2.9 が成立することを示すことができる．直線束 L が主偏極 Abel 多様体の構造を与えるとき $\operatorname{Ker}\varphi_L = \{0\}$ となり，φ_L は同型であることも以上の考察から分かる．ここで $n', n'' \in \mathbb{Z}^g$ に対して

$$\theta\begin{bmatrix} m+n' \\ m^*+n'' \end{bmatrix}(\tau, z) = \boldsymbol{e}(m\,{}^t n'')\theta\begin{bmatrix} m \\ m^* \end{bmatrix}(\tau, z) \tag{2.42}$$

が成立することに注意する．

定理 2.13

$$\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_g \end{pmatrix},\quad d_i \in \mathbb{Z},\ d_1|d_2|\cdots|d_g$$

に対して $\mathbb{Z}^g\Delta^{-1}/\mathbb{Z}^g$ の代表元を $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_d$，$d = d_1 d_2\cdots d_g = \det\Delta$ とおくと

$$\theta_0(\tau, z)\theta\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau, z),\quad \theta_0(\tau, z)\theta\begin{bmatrix} \gamma_2 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau, z),\quad \cdots,\quad \theta_0(\tau, z)\theta\begin{bmatrix} \gamma_d \\ 0 \end{bmatrix}(\tau, z)$$

は $T = \mathbb{C}^g \Big/ \begin{pmatrix} \tau \\ \Delta \end{pmatrix}$ 上の直線束 $L(H, \chi_0)$ の基底を与える．したがって特に $\dim_{\mathbb{C}} L(H, \chi_0) = \det\Delta$ が成立する． □

周期行列の標準形のとり方とテータ函数との関係は，主偏極 Abel 多様体

$T=\mathbb{C}^g\Big/\begin{pmatrix}\tau\\ I_g\end{pmatrix}$ のとき次の定理で与えられる．

定理 2.14

$$\sigma=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in Sp(g,\mathbb{Z}),\quad \tau\in\mathfrak{S}_g,\quad \widetilde{m}=(m,m^*)\in\mathbb{R}^{2g}$$

に対して

$$(\tau^{\#},z^{\#})=((\alpha\tau+\beta)(\gamma\tau+\delta)^{-1},\ z(\gamma\tau+\delta)^{-1})$$
$$\widetilde{m}^{\#}=\widetilde{m}\sigma^{-1}+\frac{1}{2}((\gamma\,{}^t\delta)_0,(\alpha\,{}^t\beta)_0)=(m^{\#},m^{*\#})$$

とおく．（ここで $g\times g$ 行列 $A=(a_{ij})$ に対して $(A)_0={}^t(a_{11},a_{22},\cdots,a_{gg})$ と定義する．）すると

$$\theta\begin{bmatrix}m^*\\ m^{*\#}\end{bmatrix}(\tau^{\#},z^{\#})=\boldsymbol{e}\left(\frac{1}{2}z(\gamma\tau+\delta)^{-1}\gamma\,{}^t z\right)\sqrt{\det(\gamma\tau+\delta)}\cdot u\theta\begin{bmatrix}m\\ m^*\end{bmatrix}(\tau,z)$$

が成立する．ここで u は $|u|=1$ となる σ,z には依存しない定数である． □

以上の定理の証明とテータ函数のさらに詳しい性質については Igusa [45] を参照されたい．

§2.2　Jacobi 多様体

(a)　閉 Riemann 面とその周期

種数 g の閉 Riemann 面 R の整係数 1 次元ホモロジー群 $H_1(R,\mathbb{Z})$ の基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ は交点数が

$$\begin{cases}\alpha_i\cdot\alpha_j=0\\ \alpha_i\cdot\beta_j=\delta_{ij}\\ \beta_i\cdot\beta_j=0\end{cases}\tag{2.43}$$

を満足するときシンプレクティック基底という．ここで δ_{ij} は $i\neq j$ のとき 0, $i=j$ のとき 1 を表す．R 上の正則 1 次微分型式の基底 $\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_g\}$ に対して

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1}\omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_1}\omega_g \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{\alpha_g}\omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_g}\omega_g \\ \int_{\beta_1}\omega_1 & \cdots & \int_{\beta_1}\omega_g \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{\beta_g}\omega_1 & \cdots & \int_{\beta_g}\omega_g \end{pmatrix}$$

を閉 Riemann 面の**周期行列**(period matrix)という．正則1次微分型式の基底 $\{\omega'_1, \cdots, \omega'_g\}$ と $H_1(R, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_g, \beta'_1, \cdots, \beta'_g\}$ から定まる周期行列を Ω' とする．このとき

$$(\omega'_1, \cdots, \omega'_g) = (\omega_1, \cdots, \omega_g)A$$

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_g \\ \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_g \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_g \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\Omega' = M\Omega A \tag{2.44}$$

が成り立つ．さらに

$$M \in Sp(g, \mathbb{Z}) = \{M \in GL(2g, \mathbb{Z}) \mid MJ\,{}^tM = J\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

であることが(2.43)から分かる．そこで周期行列を調べるためには，特定の基底に関して考察すればよいことが分かる．そのために $H_1(R, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底として図2.2のような閉曲線(閉 Riemann 面上の1点 P_0 から出る)を選ぶ．

これらの閉曲線に沿って画面を切り開くと図2.3のような $4g$ 角形 R' が得られる．逆に図2.3の $4g$ 角形を矢印の方向に沿って張り合わせることによって図2.2の曲面とその上の閉曲線が得られる．

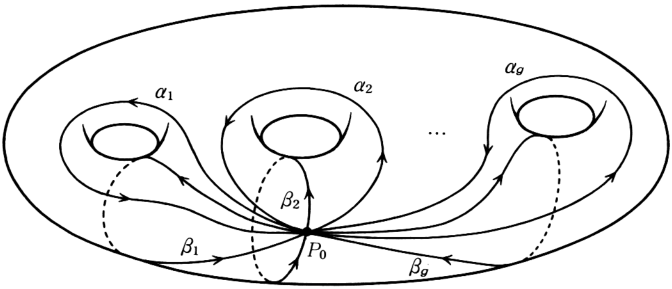


図 2.2

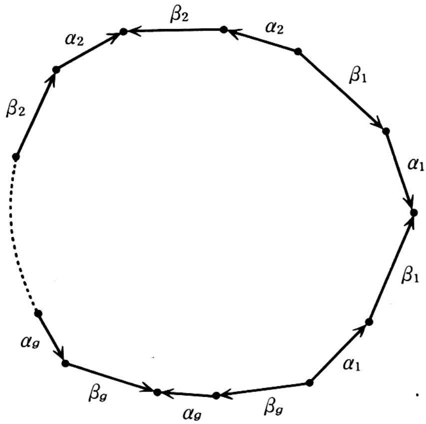


図 2.3

さて R 上の正則 1 次微分型式の基底 $\{\omega_1, \cdots, \omega_g\}$ を一つ選ぶ. $\omega_i \wedge \omega_j = 0$ であるので

$$\int_R \omega_i \wedge \omega_j = 0 \tag{2.45}$$

である. 一方 Riemann 面 R を図 2.3 のように切り開いた $4g$ 角形 R' は単連結である. したがって R' 上で

$$h_i(z) = \int_{P_0}^{z} \omega_i, \quad z \in R' \tag{2.46}$$

と定義すれば, h_i は R' の内部で 1 価正則であり, R' の境界を越えて正則函

数として解析接続でき,

$$dh_i = \omega_i \tag{2.47}$$

が成立する.

ところで図 2.2 の閉曲線 α_i 上の点 P は図 2.3 の R' の境界 $\partial R'$ 上では図 2.4 のように 2 点 P_+, P_- として現れる. 同様に閉曲線 β_i 上の点 S は $\partial R'$ 上では S_+, S_- の 2 点になって現れる(図 2.5).

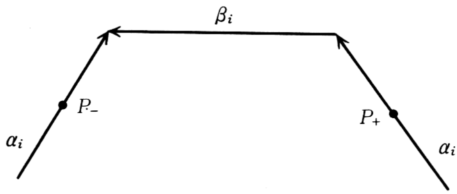


図 2.4

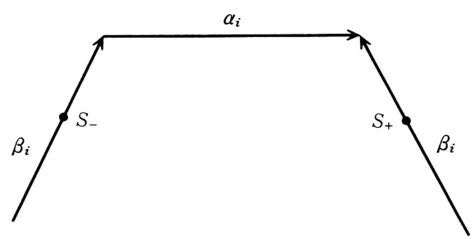


図 2.5

P_+ の乗っている α_i を α_i^+, P_- の乗っている α_i を α_i^- と以下記すことにする. β_i^+, β_i^- も同様に定める. $\partial R'$ の境界に沿って積分するとき α_i^+ と α_i^- とは向きが逆になっていることに注意する.

さて(2.45), (2.46), (2.47)を使うと

$$\begin{aligned} 0 &= \int_R \omega_i \wedge \omega_j = \int_{R'} dh_i \wedge \omega_j = \int_{R'} d(h_i\omega_j) \\ &= \int_{\partial R'} h_i\omega_j = \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{\alpha_k^+} h_i\omega_j + \int_{\beta_k^+} h_i\omega_j - \int_{\alpha_k^-} h_i\omega_j - \int_{\beta_k^-} h_i\omega_j \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{g}\left\{\int_{\alpha_k^+} h_i\omega_j + \int_{\beta_k^+} h_i\omega_j - \int_{\alpha_k^+}\left(h_i + \int_{\beta_k}\omega_i\right)\omega_j - \int_{\beta_k^+}\left(h_i - \int_{\alpha_k}\omega_i\right)\omega_j\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{g}\left\{\int_{\alpha_k}\omega_i \int_{\beta_k}\omega_j - \int_{\beta_k}\omega_i \int_{\alpha_k}\omega_j\right\}$$

を得る．この最後の式は $-{}^t\Omega J\Omega$ の (i,j) 成分を表している．したがって

$${}^t\Omega J\Omega = 0$$

が成立する．一方 $\omega = \sum_{i=1}^{g} a_i\omega_i \neq 0$ に対して

$$\sqrt{-1}\int_R \omega \wedge \overline{\omega} > 0$$

であるので，上と同様の議論を

$$h(z) = \int_{P_0}^{z}\omega = \sum_{i=1}^{g} a_i h_i(z)$$

を使って行なうと，

$$-\sqrt{-1}\,{}^t\Omega J\overline{\Omega} > 0$$

であることが分かる．(2.44)により，次の定理が成立することが分かる．

定理 2.15 (Riemann)　閉 Riemann 面の周期行列 Ω は **Riemann の条件**

(R.1)　${}^t\Omega J\Omega = 0$

(R.2)　$-\sqrt{-1}\,{}^t\Omega J\overline{\Omega} > 0$

を満足する．　□

$J^{-1} = -J$ であるので，Riemann の条件(R.1), (R.2)は定理 2.7 の条件(P.1), (P.2)の $E=J$ の場合にあたることが分かる．

この定理より，正則 1 次微分型式の基底 $\{\omega_1, \cdots, \omega_g\}$ を

$$\left(\int_{\beta_i}\omega_j\right) = I_g \tag{2.48}$$

が成立するようにとると

$$\tau = (\tau_{ij}) = \left(\int_{\alpha_i}\omega_j\right)$$

は g 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ の点となり，周期行列 Ω は

$$\Omega = \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

となる.

以上の議論により種数 g の閉 Riemann 面 R の周期行列 Ω から作られる g 次元複素トーラス $\mathbb{C}^g/\Omega$ は主偏極 Abel 多様体の構造をもつことが分かる．この主偏極 Abel 多様体を閉 Riemann 面 R の **Jacobi 多様体**(Jacobian variety)と呼び $J(R)$ と記す．Jacobi 多様体というときには常に主偏極構造を併せて考えていることに注意する．本書での Jacobi 多様体 $J(R)$ の構成法は $J(R)$ を閉 Riemann 面 R の **Albanese 多様体**(Albanese variety)と考えたものになっている．(2.42)の直前に述べたように主偏極 Abel 多様体では定理2.9 の φ_L は同型写像であるので $J(R)$ は R の Picard 多様体と考えることができることが分かる．代数幾何学的には $J(R)$ は Picard 多様体として構成する方が自然である．

(b) テータ因子

さて以下 $H_1(R,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ として図 2.2 の閉曲線をとり，正則 1 次微分型式の基底 $\{\omega_1,\cdots,\omega_g\}$ は(2.48)を満足するように選んでおく．したがって以下，Jacobi 多様体 $J(R)$ を複素トーラスとして $\mathbb{C}^g\Big/\begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}$ と表示する．また図 2.1 と同様に R の点 P_0 を固定して考える．P_0 を始点とする積分を考えることによって正則写像

$$\begin{array}{rrcl} \varphi\colon & R & \longrightarrow & J(R) \\ & Q & \longmapsto & \left[\int_{P_0}^{Q}\omega_1, \int_{P_0}^{Q}\omega_2, \cdots, \int_{P_0}^{Q}\omega_g\right] \end{array} \tag{2.50}$$

を得る．R の因子

$$D = \sum_{j=1}^{l} n_j Q_j$$

に対して

$$\varphi(D) = \sum_{j=1}^{l} n_j \varphi(Q_j)$$

と定義する．このとき次の事実が成立する．

定理 2.16（Abelの定理） $\deg D = \deg E$ である2つの因子 D, E に対して

$$\varphi(D) = \varphi(E)$$

であるための必要十分条件は

$$D \sim E \quad (D \text{ と } E \text{ が線型同値})$$

であることである． □

このAbelの定理は幾何学的には次のように捉えることができる．次数 d の**正因子**(effective divisor または positive divisor)

$$D = \sum_{j=1}^{l} n_j Q_j, \quad n_j \geqq 1, \quad d = \sum_{j=1}^{l} n_j$$

は $Q_1, Q_2, \cdots, Q_l$ が重複度をこめて d 個並んだもの

$$\underbrace{Q_1, \cdots, Q_1}_{n_1}, \underbrace{Q_2, \cdots, Q_2}_{n_2}, \cdots, \underbrace{Q_l, \cdots, Q_l}_{n_l}$$

と考えられる．その際，並び方の順序は問題にしない．並び方を考えた d 個の点は $R^d = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{d}$ の1点に対応する．R^d には各成分の置換として d 次対称群 S_d が作用し，商空間

$$R^{(d)} = R^d / S_d \tag{2.51}$$

の各点は次数 d の正因子に対応する．さらに $R^{(d)}$ はコンパクト複素多様体(実際は非特異完備射影多様体)の構造をもつ．たとえば正因子 $D = dQ$ に対応する $R^{(d)}$ の点 $[Q, \cdots, Q]$ の局所座標は，R の点 Q を中心とする局所座標を z とし，その d 個のコピーを $z_1, z_2, \cdots, z_d$ として $(z_1, z_2, \cdots, z_d)$ を点 $(Q, \cdots, Q)$ を中心とする R^d の局所座標と考えるとき，$z_1, z_2, \cdots, z_d$ に関する基本対称式

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1 + z_2 + \cdots + z_d \\ u_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{d-1} z_d \\ &\cdots\cdots \\ u_d &= z_1 z_2 \cdots z_d \end{aligned}$$

で与えられる．$R^{(d)}$ を閉 Riemann 面 R の d 次**対称積**(symmetric product)

と呼ぶ．このとき(2.50)の正則写像 $\varphi\colon R \to J(R)$ は

$$
(2.52)\qquad \begin{array}{rccc} \varphi_d\colon & R^{(d)} & \longrightarrow & J(R) \\ & [Q_1, \cdots, Q_d] & \longmapsto & \left[\sum_{j=1}^{d}\int_{P_0}^{Q_j}\omega_1,\ \sum_{j=1}^{d}\int_{P_0}^{Q_j}\omega_2,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{d}\int_{P_0}^{Q_j}\omega_g\right] \end{array}
$$

に拡張できる．$R^{(d)}$ の局所座標の入れ方から，φ_d は正則写像であることが分かる．なお，以下しばしば φ_d を φ と略記する．さて定理 2.16 は次のように言い換えることができる．

系 2.17 正則写像 $\varphi_d\colon R^{(d)} \to J(R)$ の各ファイバーは互いに線型同値な次数 d の正因子からなる． □

この事実より次の事実が示される．

系 2.18 $d \geqq 2g-1$ であれば $\varphi_d\colon R^{(d)} \to J(R)$ は $d-g$ 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^{d-g}$ をファイバーとする $J(R)$ 上のファイバー束である．

［証明］ $\deg D = d \geqq 2g-1$ であれば Riemann–Roch の定理より

$$
l(D) = d+1-g
$$

が成立する．ただし $l(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(R, \mathcal{O}_R(D))$ である．したがって線型系 $|D|$ は $\mathbb{P}^{d-g}$ と同型である．このことから φ_d の各ファイバーは $\mathbb{P}^{d-g}$ と同型であることを示すことができる．ファイバー束になることの証明は略す． ▮

系 2.19 $\varphi_g\colon R^{(g)} \to J(R)$ は全射かつ双有理写像である．

［証明］ $Q_1, Q_2, \cdots, Q_g$ が R の一般の点であれば $Q_1, Q_2, \cdots, Q_g$ で零点をとる正則 1 次微分型式は 0 しかない．したがって R の標準因子 K に対して $l(K-Q_1-Q_2-\cdots-Q_g)=0$ であり

$$
l(Q_1+Q_2+\cdots+Q_g) = g+1-g = 1
$$

となる．これは $R^{(g)}$ の一般の点で φ_g は単射であることを意味する．また φ_g は固有写像であるので $\varphi_g(R^{(g)})$ は $J(R)$ の閉部分代数多様体である．φ_g が $R^{(g)}$ の一般の点で単射であるので $\dim \varphi_g(R^{(g)}) = g$ であり，したがって $\varphi_g(R^{(g)}) = R^{(g)}$ が成立し $R^{(g)}$ の一般の点で同型写像である．したがって $R^{(g)}$, $J(R)$ を代数多様体とみると φ_g は双有理写像である． ▮

上の証明から明らかなように φ_g が同型でない点は $l(K-Q_1-Q_2-\cdots-Q_g) \neq 0$ である因子 $D = Q_1+\cdots+Q_g$ に対応する．このような因子は $g \geqq 2$ の

とき必ず存在するので φ_g は同型写像ではない.

例 2.20 種数2の閉 Riemann 面 R を考える. $\deg K=2$, $\deg(K-Q_1-Q_2)=0$ であるので $l(K-Q_1-Q_2)\neq 0$ であることは $K-Q_1-Q_2\sim 0$ と同値であり, したがって $K\sim Q_1+Q_2$ と同値である. すなわち $\varphi_2\colon R^{(2)}\to J(R)$ が同型でない点は正の標準因子に対応する点である. これらの標準因子に対応する点の像は1点 P である. $l(K)=2$ であり, $R^{(2)}$ は $J(R)$ を点 P でブローアップして得られた曲面である. □

さて $r\leqq g-1$ のとき

$$\varphi_r\colon R^{(r)} \longrightarrow J(R)$$

の像を W^r と記す. φ_r は固有正則写像であるので W^r は $J(R)$ の閉部分代数多様体である. W^r は Torelli の定理の証明で活躍する.

ところで Jacobi 多様体 $J(R)=\mathbb{C}^g\Big/\begin{pmatrix}\tau\\ I_g\end{pmatrix}$ に対して(2.33)で定義したテータ函数 $\theta(\tau,z)$ を使って $J(R)$ の因子を

$$\Theta=\{[z]\in J(R)\mid \theta(\tau,z)=0\} \tag{2.53}$$

と定義し, **テータ因子**(theta divisor)と呼ぶ. テータ因子 Θ と W^{g-1} の関係を見出すのが当面の目標である.

そのために正則写像 $\varphi\colon R\to J(R)$ を

$$\begin{array}{rccc}\widetilde{\varphi}\colon & R' & \longrightarrow & \mathbb{C}^g \\ & Q & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_{P_0}^{Q}\omega_1,\int_{P_0}^{Q}\omega_2,\cdots,\int_{P_0}^{Q}\omega_g\right)\end{array} \tag{2.54}$$

によって R' から $\mathbb{C}^g$ への正則写像に持ち上げて考える. 次の補題から始めよう.

補題 2.21 $\varphi\colon R\to J(R)$ と $e=(e_1,e_2,\cdots,e_g)\in\mathbb{C}^g$ に対して $\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)\neq 0$ であれば $\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)$ は R 上で重複度をこめて g 個の零点をもつ.

[証明] 図2.3を使う. 必要であれば図2.2の閉曲線 α_i,β_i を少し変形することによって $\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)$ の零点は $\partial R'$ 上にないと仮定することができる. このとき

$$\text{零点の個数} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial R'} d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q)-e)$$

であるので右辺を計算する．α_i, β_i 上の点 Q, Q' に対して対応する R' 上の点を図2.6のように記すと

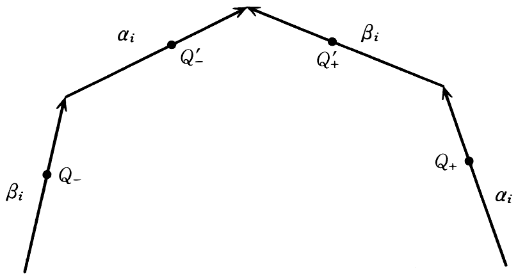


図2.6

(2.55)
$$\widetilde{\varphi}(Q_-) = \widetilde{\varphi}(Q_+) + \left(\int_{\beta_j}\omega_1, \int_{\beta_j}\omega_2, \cdots, \int_{\beta_j}\omega_g\right)$$
$$= \widetilde{\varphi}(Q_+) + (0, 0, \overset{j}{\check{1}}, 0, \cdots, 0)$$

(2.56)
$$\widetilde{\varphi}(Q'_-) = \widetilde{\varphi}(Q'_+) - \left(\int_{\alpha_j}\omega_1, \int_{\alpha_j}\omega_2, \cdots, \int_{\alpha_j}\omega_g\right)$$
$$= \varphi(Q'_+) - (\tau_{j1}, \tau_{j2}, \cdots, \tau_{jg})$$

が成立する．したがって(2.34)より

$$\int_{\partial R'} d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q)-e)$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j=1}^{g}\left(\int_{\alpha_j}\left(d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q_+)-e) - d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q_-)-e)\right)\right)$$
$$+ \int_{\beta_j}\left(d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q'_+)-e) - d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q'_-)-e)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}\int_{\beta_j} d\left(\tau_{jj} + 2\int_{P_0}^{Q}\omega_j - 2e_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{g}\int_{\beta_j}\omega_j = g$$

を得る． ∎

補題 2.22　$\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)\not\equiv 0$ のとき $\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)$ の零点を重複度をこめて $Q_1,Q_2,\cdots,Q_g$ と記すと，

$$\sum_{j=1}^{g}\varphi(Q_j)+[\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_g]=[e_1,e_2,\cdots,e_g]$$

を満足する定数ベクトル $(\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_g)$ が周期の不定性を除いて e に無関係に存在する．定数ベクトル κ は $H_1(R,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底のとり方に依存する． □

定数ベクトル κ は **Riemann 定数**(Riemann's constant)と呼ばれる．κ は $H_1(R,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を固定すれば周期を法として一意的に定まる．

［証明］　(2.54)の写像 $\widetilde{\varphi}$ に関して $\widetilde{\varphi}(Q)=(\widetilde{\varphi}_1(Q),\widetilde{\varphi}_2(Q),\cdots,\widetilde{\varphi}_g(Q))$ と記すと $\widetilde{\varphi}_k(Q)$ は R' 上の正則函数であるので，$Q_1,\cdots,Q_g$ が $\partial R'$ 上にないと仮定することによって

$$\sum_j\widetilde{\varphi}_k(Q_j)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial R'}\widetilde{\varphi}_k(Q)d\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)$$

が成立する．図 2.3，図 2.6 の記号を使うと(2.55)，(2.56)およびテータ函数の擬周期性(2.34)により，上式の右辺は $\tau_j=(\tau_{j1},\tau_{j2},\cdots,\tau_{jg})$ と記して

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\alpha_k}d\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)\\
&\quad+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j=1}^{g}\left\{\int_{\beta_j}\widetilde{\varphi}_k(Q)d\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)\right.\\
&\qquad\left.-(\widetilde{\varphi}_k(Q)-\tau_{jk})d\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-\tau_j-e)\right\}\\
&=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\alpha_k}d\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}\int_{\beta_j}(\widetilde{\varphi}_k(Q)-\tau_{jk})d(-\tau_{jj}+2\widetilde{\varphi}_j(Q)-2e_j)\\
&\qquad+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j=1}^{g}\tau_{jk}\int_{\beta_j}d\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\alpha_k} d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q)-e)$$
$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{j=1}^{g}\tau_{jk}\int_{\beta_j} d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q)-e)$$
$$-\sum_{j=1}^{g}\int_{\beta_j}(\widetilde{\varphi}_k(Q)-\tau_{jk})\omega_j$$

となる．図 2.7 のように $\partial R'$ の α_j の始点を P_j，終点を P_j'，β_j の終点を P_j'' と記すと(これらの点は R では点 P_0 に対応する)

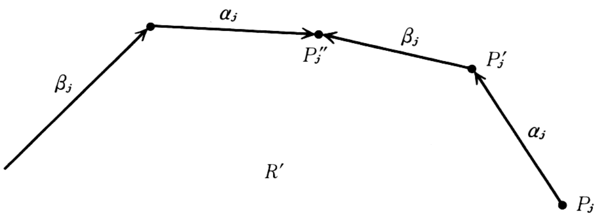


図 2.7

$$\widetilde{\varphi}(P_j') = \widetilde{\varphi}(P_j) + \left(\int_{\alpha_j}\omega_1, \cdots, \int_{\alpha_j}\omega_g\right)$$
$$= \widetilde{\varphi}(P_j) + (\tau_{j1}, \tau_{j2}, \cdots, \tau_{jg})$$
$$\widetilde{\varphi}(P_j'') = \widetilde{\varphi}(P_j') + \left(\int_{\beta_j}\omega_1, \cdots, \int_{\beta_j}\omega_g\right)$$
$$= \widetilde{\varphi}(P_j') + (0, \cdots, 0, \overset{j}{\breve{1}}, 0, \cdots, 0)$$

が成立する．したがって

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\alpha_k} d\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q)-e)$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\{\log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(P_k')-e) - \log\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(P_k)-e)\}$$
$$\equiv -\frac{1}{2}\tau_{kk} - \widetilde{\varphi}_k(P_k) + e_k \pmod{\mathbb{Z}}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\beta_j} d\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-e)\\&=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\{\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(P_j'')-e)-\log\theta(\tau,\widetilde{\varphi}(P_j')-e)\}\\&\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}\end{aligned}$$

を得る．これより

$$\kappa_k=\sum_{j=1}^{g}\int_{\beta_j}(\widetilde{\varphi}_k(Q)-\tau_{jk})\omega_j+\frac{1}{2}\tau_{kk}=\sum_{j=1}^{g}\int_{\beta_j}\widetilde{\varphi}_k(Q)\omega_j-\sum_{j=1}^{g}\tau_{jk}+\frac{1}{2}\tau_{kk}$$

とおくと，これは e とは無関係に定まる．以上の計算をまとめると

$$\sum_{j=1}^{g}\widetilde{\varphi}_k(Q_j)=e_k-\kappa_k+\widetilde{\varphi}_k(P_k)+m_k+\sum_{j=1}^{g}n_j\tau_{jk},\quad m_k,n_j\in\mathbb{Z}$$

を得る．$[\widetilde{\varphi}_1(P_k),\widetilde{\varphi}_2(P_k),\cdots,\widetilde{\varphi}_g(P_k)]=\varphi(P_0)=0$ であることにより

$$\sum_{j=1}^{g}\widetilde{\varphi}(Q_j)+\kappa\equiv e \pmod{\Lambda}$$

が成立することが分かる．∎

系 2.23　$\theta\left(\tau,\widetilde{\varphi}(Q)-\sum_{j=1}^{g}\widetilde{\varphi}(Q_j)-\kappa\right)\not\equiv 0$ であれば，これを点 Q に関する R 上の多価正則函数とみたときの零点は $Q_1,Q_2,\cdots,Q_g$ である．

［証明］　$e=\sum_{j=1}^{g}\widetilde{\varphi}(Q_j)+\kappa$ とおいて，上の補題を適用する．$P_1,P_2,\cdots,P_g$ を零点とすると

$$\sum_{j=1}^{g}\widetilde{\varphi}(P_j)+\kappa=\sum_{j=1}^{g}\widetilde{\varphi}(Q_j)+\kappa$$

が成立し，Abel の定理(定理 2.16)より

$$\sum_{j=1}^{g}P_j\sim\sum_{j=1}^{g}Q_j$$

が成立する．これは系の条件のもとでは

$$\sum_{j=1}^{g}P_j=\sum_{j=1}^{g}Q_j$$

を意味する．∎

系 2.24　Riemann 面 R 上の任意の $g-1$ 個の点 $P_1, \cdots, P_{g-1}$ に対して

$$\theta\left(\tau, \sum_{j=1}^{g-1} \widetilde{\varphi}(P_j)+\kappa\right) = 0$$

が成立する．

［証明］　Riemann 面 R 上の g 個の点 $Q', P_1, P_2, \cdots, P_{g-1}$ を一般の位置にとると，Q の函数として

$$\theta\left(\tau,\ \widetilde{\varphi}(Q)-\widetilde{\varphi}(Q')-\sum_{j=1}^{g-1} \widetilde{\varphi}(P_j)-\kappa\right) \not\equiv 0$$

である．この函数の零点は $Q', P_1, \cdots, P_{g-1}$ である．したがって特に $Q=Q'$ とおくと

$$\theta\left(\tau, -\sum_{j=1}^{g-1} \widetilde{\varphi}(P_j)-\kappa\right) = 0$$

が成立する．$\theta(\tau, z)$ は z に関して偶函数であるので

$$\theta\left(\tau, \sum_{j=1}^{g-1} \widetilde{\varphi}(P_j)+\kappa\right) = 0$$

が成立する．$P_1, P_2, \cdots, P_{g-1}$ は R 上の一般の位置にある点であったので，上式は R 上のすべての $g-1$ 個の点に対しても成立する． ∎

上の系を幾何学的に言い換えると，次の重要な定理が成立することが分かる．

定理 2.25　$J(R)$ のテータ因子 Θ に関して

$$\Theta = W^{g-1}+[\kappa]$$

が成立する． □

この定理は Jacobi 多様体 $J(R)$ の偏極構造が直線束 $[W^{g-1}]$ で与えられることを示している．

さて次数 $g-1$ の正因子 D に対して Riemann–Roch の定理より

$$l(D)-l(K-D) = 0$$

が成立し，$K-D \sim E$ となる次数 $g-1$ の正因子 E が存在することが分かる．このとき

$$\varphi(E) = \varphi(K-D) = \varphi(K)-\varphi(D)$$

が成立する．D としては次数 $g-1$ の任意の正因子をとることができるので

$$\varphi(E) \in \varphi(K) - W^{g-1}$$

が成立する．一方，次数 $g-1$ の任意の正因子 E に対して $K-E \sim D$ となる次数 $g-1$ の正因子 D が存在する．これより $K-D \sim E$ であるので上の式より

$$W^{g-1} \subset \varphi(K) - W^{g-1}$$

であることが分かる．また

$$\varphi(K) - \varphi(D) \in W^{g-1}$$

でもあるので，

$$\varphi(K) - W^{g-1} \subset W^{g-1}$$

が成立し，

$$W^{g-1} = \varphi(K) - W^{g-1} \tag{2.57}$$

が成り立つことが分かる．また $\theta(\tau, -z) = \theta(\tau, z)$ より

$$-\Theta = \Theta$$

が成立する．したがって定理 2.25 と (2.57) を使うことによって

$$W^{g-1} + [\kappa] = \Theta = -\Theta = -W^{g-1} - [\kappa] = W^{g-1} - \varphi(K) - [\kappa]$$

を得る．以上によって次の結果を得る．

命題 2.26 Riemann 定数 κ と標準因子 K との間には

$$2[\kappa] = -\varphi(K)$$

なる関係が成立する． □

例 2.27 種数 2 の閉 Riemann 面 R に対して $W^1 = \varphi(R)$ は R と同型な閉 Riemann 面である．したがってテータ因子 Θ も種数 2 の閉 Riemann 面である．よって Jacobi 多様体 $J(R)$ は種数 2 の閉 Riemann 面 C を閉部分多様体として含み，$(J(R), [C])$ は主偏極構造を与える．

逆に 2 次元 Abel 多様体 A が種数 2 の非特異代数曲線 C を含むと $(A, [C])$ は主偏極 Abel 多様体であり，C の Jacobi 多様体と同型である．これは次のようにして示される．

C の Jacobi 多様体 $J(C)$ は C の Albanese 多様体であるので自然な埋め込み $\iota\colon C \hookrightarrow A$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & J(C) \\ & {\scriptstyle\iota}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle h} & \\ & A & \end{array}$$

が可換になるような正則写像 $h\colon J(C)\to A$ が存在する．ι, φ は共に単射であるので h は同型写像でなければならない．よって $(A,[C])$ は主偏極 Abel 多様体として Jacobi 多様体 $J(C)$ と同型である．

ところで，楕円曲線 E が与えられたとき，$E\times E$ 内に種数 2 の代数曲線 C が存在することがある．このとき $(E\times E,[C])$ は $J(C)$ と同型である．一方 E の点 a,b に対して $D=a\times E+E\times b$ は $E\times E$ の豊富な因子であり，$(E\times E,[D])$ も主偏極 Abel 多様体である．しかし $(E\times E,[C])$ と $(E\times E,[D])$ とは主偏極 Abel 多様体としては同型でない．

E が虚数乗法をもつ楕円曲線のとき，$E\times E$ は種数 2 の代数曲線を含むこと，しかもときには複数の互いに同型でない種数 2 の代数曲線を含むことが知られている(Hayashida–Nishi [43])．また種数 2 の曲線

$$y^2=(x^3-a^3)(x^3-a^{-3}), \quad y^2=x^6-1, \quad y^2=x(x^4-1)$$

の Jacobi 多様体は虚数乗法をもつ楕円曲線の直積と偏極構造を考えない Abel 多様体として同型であることが知られている．この事実は次の定理から従う． □

定理 2.28 2 次元 Abel 多様体 A が虚数乗法をもつ楕円曲線の 2 個の直線 $E_1\times E_2$ と**同種**(isogeny)であれば，すなわち全射正則写像 $f\colon A\to E_1\times E_2$ が存在すれば，A は楕円曲線の 2 個の直線と同型である． □

証明は Shioda–Mitani [81]を参照されたい．

(c) Riemann の特異点定理

テータ因子は主偏極 Abel 多様体に対していつでも定義できるが，Jacobi 多様体のテータ因子は閉 Riemann 面と関係して種々の興味ある特徴をもっている．ここで Riemann によって最初に見出された Jacobi 多様体のテータ

因子の特異点に関する定理を古典的な形で述べる．この定理は Kempf [51] によって一般化され，幾何学的に明快な説明がされている．

定理 2.29（Riemann の特異点定理） 閉 Riemann 面 R のテータ因子 Θ の点 x を

$$x = \sum_{j=1}^{g-1} \varphi(Q_j) + [\kappa]$$

と記すと，Θ の点 x での重複度は

$$\mathrm{mult}_x \Theta = l(Q_1 + \cdots + Q_{g-1})$$

で与えられる．

［証明］ $D = \sum_{j=1}^{g-1} Q_k$ とおく．系 2.24 より

$$\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(D) + \kappa) = 0$$

が成立する．$l(D) = m+1$ とおく．$\dim|D| = m$ であるので $m \geqq 1$ であれば線型系 $|D|$ は $R^{(g-1)}$ 内の $\mathbb{P}^m$ と同型な m 次元複素部分多様体と考えることができる．以下 $|D|$ を $R^{(g-1)}$ の複素部分多様体と考える．

十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $F = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ で定義された $R^{(g-1)}$ の解析的曲線 $D(t) = \sum_{j=1}^{g-1} Q_j(t)$ を $Q_j(0) = Q_j$, $j = 1, \cdots, g-1$ であるようにとる．すると F 上の函数として

$$\theta\Big(\tau, \widetilde{\varphi}(D(t)) + \kappa\Big) \equiv 0 \tag{2.58}$$

である．Q_j を中心とする R の局所座標 z_j を使って正則 1 次微分型式 ω_i を

$$\omega_i = h_{ij}(z_j) dz_j,$$

解析的曲線 $Q_j(t)$ を

$$z_j = a_j(t)$$

と表示すると

$$\widetilde{\varphi}(D(t)) = \left(\sum_{j=1}^{g-1} \int_{P_0}^{Q_j(t)} \omega_1, \cdots, \sum_{j=1}^{g-1} \int_{P_0}^{Q_j(t)} \omega_g \right)$$

であるので(2.58)を t に関して $t=0$ で微分すると

$$\sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\theta(\tau,\, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i}\left(\sum_{j=1}^{g-1} h_{ij}(0)a_j'(0)\right) = 0$$

が成立する．$a_j'(0)$ は $a_j(t)$ を変えることによって任意の値をとり得るので，これより

$$\sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\theta(\tau,\, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i} h_{ij}(0) = 0$$

を得る．この等式を $\omega_i(Q_j)=h_{ij}(0)$ とおいて

$$(2.59)\qquad \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\theta(\tau,\, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i}\omega_i(Q_j) = 0, \quad j=1,\cdots,g-1$$

と略記する．$\omega_i(Q_j)$ は局所座標のとり方に依存するが，違いはすべての i に共通の定数倍である．もし $\dim|D|=m\geqq 1$ であれば，R の任意の点 P に対して

$$D \sim P+D'$$

となる正因子 D' が存在する．$\varphi(D)=\varphi(P+D')$ であるので(2.59)より

$$(2.60)\qquad \sum_{i=1}^{g} \frac{\partial\theta(\tau,\, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i}\omega_i(P) = 0$$

が R の任意の点で成立することが分かる．

ところで $P_1, P_2, \cdots, P_g$ を R の一般の点とすると行列

$$\begin{pmatrix} \omega_1(P_1) & \omega_2(P_1) & \cdots & \omega_g(P_1) \\ \omega_1(P_2) & \omega_2(P_2) & \cdots & \omega_g(P_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1(P_g) & \omega_2(P_g) & \cdots & \omega_g(P_g) \end{pmatrix}$$

の階数は g である．これは R の**標準曲線**(canonical curve) $\Phi_{|K|}(R)$ が $\mathbb{P}^{g-1}$ より次元の低い部分射影空間に含まれないこと(もし含まれていれば $\dim|K|<g-1$ となる．標準写像については必要ならば下の(2.66)をみよ)から直ちに従う．したがって(2.60)より

$$\frac{\partial\theta(\tau,\, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i} = 0, \quad i=1,2,\cdots,g$$

が従う．よって $m\geqq 1$ であれば点 $x=\widetilde{\varphi}(D)+\kappa$ は Θ の特異点であることが

分かる.

さて(2.58)の 2 階偏微分をとることによって

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{g} \frac{\partial^2 \theta(\tau, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i \partial z_j} h_{ik}(0) h_{jl}(0) a_k'(0) a_l'(0) = 0$$

を得る. $a_k'(0), a_l'(0)$ は任意の値をとり得るので

$$\sum_{i,j=1}^{g} \frac{\partial^2 \theta(\tau, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i \partial z_j} \omega_i(Q_k) \omega_j(Q_l) = 0, \quad 1 \leqq k, l \leqq g \tag{2.61}$$

が成立する. もし $m = \dim |D| \geqq 2$ であれば, R 上の任意の 2 点 P, Q に対して

$$D \sim P + Q + D''$$

となる正因子 D'' が存在する. $\varphi(D) = \varphi(P+Q+D'')$ であるので(2.61)より R 上の任意の 2 点 P, Q に対して

$$\sum_{i,j=1}^{g} \frac{\partial^2 \theta(\tau, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i \partial z_j} \omega_i(P) \omega_j(Q) = 0$$

が成立する. ここで再び R の標準曲線 $\Phi_{|K|}(R)$ は $\mathbb{P}^{g-1}$ の次元の低い射影部分空間に含まれないことを使えば

$$\sum_{i=1}^{g} \frac{\partial^2 \theta(\tau, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i \partial z_j} \omega_i(P) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, g$$

が R 上の任意の点 P に対して成立することが分かる. この等式に再び上と同様の議論を適用して

$$\frac{\partial^2 \theta(\tau, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_i \partial z_j} = 0, \quad 1 \leqq i, j \leqq g$$

を得る. 以下同様の議論により, $1 \leqq l \leqq m$ に対して

$$\frac{\partial^l \theta(\tau, \widetilde{\varphi}(D)+\kappa)}{\partial z_{i_1} \partial z_{i_2} \cdots \partial z_{i_l}} = 0, \quad 1 \leqq i_1, i_2, \cdots, i_l \leqq g$$

が成立することが分かる. これより $x = \varphi(D) + [\kappa]$ に対して

$$\mathrm{mult}_x \Theta \geqq \dim |D| + 1 = l(D)$$

が成立することが分かる. ここで等号が成立することを示そう.

$D = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_{g-1}$ に対して行列

$$BN(D)=\begin{pmatrix} \omega_1(Q_1) & \omega_2(Q_1) & \cdots & \omega_g(Q_1) \\ \omega_1(Q_2) & \omega_2(Q_2) & \cdots & \omega_g(Q_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1(Q_{g-1}) & \omega_2(Q_{g-1}) & \cdots & \omega_g(Q_{g-1}) \end{pmatrix}$$

を考える．この行列は点 Q_j を中心とする局所座標 z_j のとり方に依存するが，違いは j 行の定数倍だけであり，行列の階数は局所座標のとり方によらない．また $Q_j=Q_{j+1}$ のときは $j+1$ 行は

$$\omega_1'(Q_j),\ \omega_2'(Q_j),\ \cdots,\ \omega_g'(Q_j)$$

と変える必要がある．ただし Q_j を中心とする局所座標 z_j を使って $\omega_i=h_{ij}(z_j)dz_j$ と書けるとき $\omega_i'(Q_j)=h_{ij}'(0)$ を意味する．以下，議論を簡単にするために $Q_1,\cdots,Q_{g-1}$ はすべて相異なると仮定するが，行列 $BN(D)$ を上記のように補正して考えれば，以下の議論はほとんどそのまま通用する．

$l(K-D)$ は $(a_1,a_2,\cdots,a_g)$ に関する連立方程式

$$a_1\omega_1(Q_j)+a_2\omega_2(Q_j)+\cdots+a_g\omega_g(Q_j)=0,\quad j=1,2,\cdots,g-1$$

の解の次元に等しい．したがって

$$l(K-D)=g-\operatorname{rank} BN(D)$$

が成立する．一方 Riemann–Roch の定理により $l(D)=l(K-D)$ が成立するので

$$l(D)=g-\operatorname{rank} BN(D)$$

が成立する．$l(D)=m+1$ とおいたので

$$m=g-1-\operatorname{rank} BN(D)$$

が成立する．したがって $m=0$ であれば

$$\operatorname{rank} BN(D)=g-1$$

である．一方写像 $\varphi\colon R^{(g-1)}\to J(R)$ の点 $D=\sum_{j=1}^{g-1}Q_j$ での微分 $d\varphi_D\colon T_DR^{(g-1)}\to T_xJ(R)$ は行列 $BN(D)$ で表される．したがって $m=0$ であれば $d\varphi_D$ の階数は $g-1$ となり $\varphi(R^{(g-1)})+[\kappa]=\Theta$ は点 $x=\varphi(D)+[\kappa]$ で非特異である．したがってこの場合，定理は成立する．

次に $\dim|D|=m\geqq 1$ の場合を考える．一般の位置にある R の点 $P_1, P_2, \cdots, P_{m+1}$ をとり

$$E = P_1+P_2+\cdots+P_{m+1}$$

とおく．すると

$$|D-E| = \varnothing$$

が成立する．また $l(K-D-E)=0$ が成立するので Riemann–Roch の定理より $l(D+E)=m+1$ となり

$$|D+E| = |D|+E \tag{2.62}$$

であることが分かる．一方，$E_i=E-P_i$ とおくと

$$|D-E_i| \neq \varnothing \tag{2.63}$$

である．さて正則写像 $\psi\colon R^{(m+1)}\to J(R)$ を

$$\psi(F) = \varphi(D+E-F)+[\kappa]$$

と定義する．すると定理 2.25 より

$$\mathrm{supp}(\psi^*\Theta) = \{F\in R^{(m+1)} \mid |D+E-F|\neq\varnothing\} \tag{2.64}$$

となる．(2.62), (2.63) より $|D+E-F|\neq\varnothing$ であるための必要十分条件は $|D-F|\neq\varnothing$ であるか，$F\geqq P_i$ であることである．そこで

$$X_i = \{F\in R^{(m+1)} \mid F\geqq P_i\}, \quad i=1,2,\cdots,m+1$$

とおくと

$$\mathrm{supp}(\psi^*\Theta) = \bigcup_{i=1}^{m+1} X_i \cup \{F\in R^{(m+1)} \mid |D-F|\neq\varnothing\}$$

が成り立つ．$X_i\simeq R^{(m)}$ であるので X_i は $R^{(m+1)}$ の非特異因子であることが分かる．

さて R 上に $P_1, \cdots, P_{m+1}$ とは別に一般の位置にある点 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ をとり，

$$F_i = P_i+S_1+S_2+\cdots+S_m, \quad i=1,2,\cdots,m+1$$

とおく．このとき $F_i\in X_i$ である．そこでテータ因子 Θ と $\psi(R^{(m+1)})$ の点 $\psi(F_i)=\varphi(D+E-F_i)+[\kappa]$ での接空間は横断的(transversally)に交わること，すなわち

$$\psi_* T_{F_i}R^{(m+1)} \not\subset T_{\psi(F_i)}\Theta \tag{2.65}$$

であることを示そう．そのために $J(R)$ の接束は自明であり，$T_0J(R)$ は

$H^0(R, \Omega_R^1)^\vee$ と標準的に同一視できることに注意する．したがって $J(R)$ の各点での接空間は $H^0(R, \Omega_R^1)^\vee$ と標準的に同一視できる．一方 R の**標準写像**(canonical map) $\Phi_{|K|}$ は

$$\text{(2.66)}\qquad \begin{array}{rccc} \Phi_{|K|}\colon & R & \longrightarrow & \mathbb{P}^{g-1} \\ & Q & \longmapsto & (\omega_1(Q):\omega_2(Q):\cdots:\omega_g(Q)) \end{array}$$

で定義されるが，このとき $\mathbb{P}^{g-1}=\mathbb{P}(H^0(R,\Omega_R^1)^\vee)=H^0(R,\Omega_R^1)^\vee\setminus\{0\}/\mathbb{C}^*$ とみることができる．したがって写像 $\varphi=\varphi_d\colon R^{(d)}\to J(R)$ の点 G での微分 $d\varphi_G\colon T_GR^{(d)}\to T_{\varphi(G)}J(R)$ を射影化すると

$$d\varphi_d\colon\ \mathbb{P}(T_GR^{(d)})\longrightarrow \mathbb{P}(T_{\varphi(G)}J(R))=\mathbb{P}(H^0(R,\Omega_R^1)^\vee)$$

とみることができる．$G=Q_1+\cdots+Q_d$ のとき $d\varphi_G$ は行列

$$BN(G)=\begin{pmatrix} \omega_1(Q_1) & \omega_2(Q_1) & \cdots & \omega_g(Q_1) \\ \omega_1(Q_2) & \omega_2(Q_2) & \cdots & \omega_g(Q_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1(Q_d) & \omega_2(Q_d) & \cdots & \omega_g(Q_d) \end{pmatrix}$$

で与えられる．これより $\Phi_{|K|}(Q_1),\cdots,\Phi_{|K|}(Q_d)$ の張る $\mathbb{P}^{g-1}$ での部分空間を $\overline{\Phi_{|K|}(G)}$ と記すことにすると

$$\text{(2.67)}\qquad d\varphi_G(\mathbb{P}(T_GR^{(d)}))=\overline{\Phi_{|K|}(G)}$$

が成立することが分かる．

さて，上記の点 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ は $\dim\left|D-\sum_{i=1}^m S_i\right|=0$ であるようにとれるので $|D|$ に正因子

$$D_0=D_0'+S_1+\cdots+S_m,\quad D_0'\geqq 0$$

が存在する．このとき $\varphi(D+E-F_i)=\varphi(D_0'+E_i)$ となり，定理2.25と(2.67)より

$$\mathbb{P}T_{\psi(F_i)}\Theta=\overline{\Phi_{|K|}(D_0'+E_i)}$$

が成立する．一方，上で最初に選んだ $P_1,P_2,\cdots,P_{m+1}$ も R の一般の点であったので，必要ならば P_i を少し動かして選び直すことによって

$$\Phi_{|K|}(P_i)\notin\overline{\Phi_{|K|}(D_0'+E_i)},\quad i=1,2,\cdots,g$$

と仮定しても一般性を失わない．また $F=\sum_{k=1}^{m+1} A_k$ に対して

$$\psi(F)=\left[\sum_{j=1}^{g-1}\int_{P_0}^{Q_j}\omega_1+\sum_{i=1}^{m}\int_{P_0}^{P_i}\omega_1-\sum_{k=1}^{m+1}\int_{P_0}^{A_k}\omega_1,\ \cdots,\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{g-1}\int_{P_0}^{Q_j}\omega_g+\sum_{i=1}^{m}\int_{P_0}^{P_i}\omega_g-\sum_{k=1}^{m+1}\int_{P_0}^{A_k}\omega_g\right]+[\kappa]$$

$$\varphi(F)=\left[\sum_{k=1}^{m+1}\int_{P_0}^{A_k}\omega_1,\ \cdots,\ \sum_{k=1}^{m+1}\int_{P_0}^{A_k}\omega_g\right]$$

であるので，(2.67)より

$$d\psi_*(\mathbb{P}T_{F_i}R^{(m+1)})=d\varphi_*(\mathbb{P}T_{F_i}R^{(m+1)})=\overline{\Phi_{|K|}(F_i)}$$

が成立し，

$$\Phi_{|K|}(P_i)\in d\psi_*(\mathbb{P}T_{F_i}R^{(m+1)})$$

であることが分かる．したがって

$$d\psi_*(\mathbb{P}T_{F_i}R^{(m+1)})\not\subset\mathbb{P}T_{\psi(F_i)}\Theta$$

となり(2.65)が成立することが分かる．すなわち Θ と $\psi(C^{(m+1)})$ の点 $\psi(F_i)$ での接空間は横断的に交わることが分かる．これは $\psi^*\Theta$ は $R^{(m+1)}$ 内の点 F_i の近傍では非特異であることを意味する．ところで上記の $E=P_1+P_2+\cdots+P_{m+1}$ は $\{F\,|\,|D-F|\neq\varnothing\}$ には属していないので，(2.64)と上の考察によって $\psi^*\Theta$ は $R^{(m+1)}$ の因子と考えると点 $E\in R^{(m+1)}$ の近傍では

$$\psi^*\Theta=X_1+X_2+\cdots+X_{m+1}$$

と書くことができる．X_j は $R^{(m+1)}$ の非特異部分多様体であり，E で横断的に交わっている．したがって

$$\begin{aligned}m+1&=\mathrm{mult}_E\psi^*\Theta\\&\geqq\mathrm{mult}_{\psi(E)}\Theta=\mathrm{mult}_x\Theta\end{aligned}$$

が成立する． ∎

Jacobi 多様体 $J(R)$ の Θ 因子の特異点は主偏極 Abel 多様体の中で Jacobi 多様体を特徴づけるのに大切な役割をする．ここでは Andreotti–Mayer [3] による次の基本的な結果を述べておく．

定理 2.30　種数 $g\geqq 4$ の閉 Riemann 面 R の Jacobi 多様体 $J(R)$ のテータ因子 Θ の特異点集合の全体を Θ_{sing} と表すと

$$\dim \Theta_{\mathrm{sing}} = \begin{cases} g-4, & R \text{ は超楕円曲線でない} \\ g-3, & R \text{ は超楕円曲線} \end{cases}$$

が成立する. □

§2.3　Torelli の定理

(a)　Torelli の定理

Torelli の定理は主偏極 Abel 多様体としての Jacobi 多様体 $J(R)$ がもとの閉 Riemann 面 R を一意的に定めることを主張する.

定理 2.31（Torelli の定理）　種数 g の閉 Riemann 面 R, R' の Jacobi 多様体を $J(R), J(R')$，それぞれのテータ因子を Θ, Θ' と記すと，R と R' とが同型であるための必要十分条件は $(J(R), [\Theta])$ と $(J(R'), [\Theta'])$ とが主偏極 Abel 多様体として同型であることである. □

この定理では $J(R), J(R')$ が単に Abel 多様体として同型であるのではなく，主偏極 Abel 多様体として同型であることが条件として主張されていることに注意する. $J(R)$ と $J(R')$ が Abel 多様体として同型であるだけでは R と R' とが同型であることは必ずしも結論することはできない(例 2.27).

まず $J(R)=\mathbb{C}^g/\Omega$ の接ベクトル束は自明であることに注意する. したがって $J(R)$ の各点 x での接空間 $T_xJ(R)$ は自然に $\mathbb{C}^g$ と同一視できる. $J(R)$ の d 次元複素部分多様体 X に対して X の非特異点の全体を X_{reg} と記す. 点 $x \in X_{\mathrm{reg}}$ に対して接空間 T_xX_{reg} は $T_xJ(R)$ の d 次元部分空間であり，$T_xJ(R)=\mathbb{C}^g$ と考えることによって $\mathbb{C}^g$ の d 次元部分空間が定まり，したがって Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}(d, g)$ の点が定まる. これより写像

$$g_X \colon X_{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathrm{Grass}(d, g)$$

が定義できるが，この写像が正則写像であることも容易に分かる. 写像 g_X は X の **Gauss 写像**(Gauss map)と呼ばれる.

(2.50)の正則写像 $\varphi \colon R \to J(R)$ によって R と $W^1=\varphi(R) \subset J(R)$ を同一視すると，

$$\varphi(z) = \left[\int_{P_0}^{z}\omega_1, \int_{P_0}^{z}\omega_2, \cdots, \int_{P_0}^{z}\omega_g\right]$$

より，この場合の Gauss 写像

$$g_R\colon R \longrightarrow \mathrm{Grass}(1,g) = \mathbb{P}^{g-1}$$

は

$$g_R(z) = (h_1(z) : h_2(z) : \cdots : h_g(z))$$

で与えられる．ここで $\omega_i = h_i(z)dz$ である．したがって g_R は R の標準写像 $\Phi_{|K|}$ であることが分かる．よって R が超楕円曲線でなければ g_R は埋め込み写像である．R が超楕円曲線のときは g_R の像は非特異有理曲線 C であり，$g_R\colon R \to C$ は2次の分岐被覆である．$C \simeq \mathbb{P}^1$ であるので g_R が R の超楕円曲線の構造を与えている．

Torelliの定理を証明するためにはテータ因子 Θ，正確には $\Theta_{-[\kappa]} = W^{g-1} \subset J(R)$ の Gauss 写像を考える．ただし κ は Riemann 定数である．この Gauss 写像は

$$\alpha\colon W^{g-1}_{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathrm{Grass}(g-1,g) = (\mathbb{P}^{g-1})^*$$

と書くことができる．ここで $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ は $\mathbb{P}^{g-1} = \mathrm{Grass}(1,g)$ の双対射影空間である．Riemann の特異点定理(定理2.29)より $\varphi(D) \in W^{g-1}$，$D = \sum_{j=1}^{g-1} Q_j$ が W^{g-1} の非特異点であるための必要十分条件は $l(D) = l(K-D) = 1$ が成立することである．この条件は

$$BN(D) = \begin{pmatrix} \omega_1(Q_1) & \omega_2(Q_1) & \cdots & \omega_g(Q_1) \\ \omega_1(Q_2) & \omega_2(Q_2) & \cdots & \omega_g(Q_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1(Q_{g-1}) & \omega_2(Q_{g-1}) & \cdots & \omega_g(Q_{g-1}) \end{pmatrix}$$

の階数が $g-1$ であることと同値であること，またこのとき，$\varphi(D)$ での W^{g-1} の接空間は $BN(D)$ の各行が定めるベクトルで張られることを定理2.29の証明中に示した．言い換えれば $\alpha(\varphi(D))$ は $\Phi_{|K|}(Q_1), \cdots, \Phi_{|K|}(Q_{g-1})$ で張られる $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面($g-2$ 次元射影部分空間)が定める $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ の点である．($Q_1, \cdots, Q_{g-1}$ のうちに同一の点があれば，定理2.29の証明中に述べたよう

に $\omega_i(z)=h_i(z)dz$ に対して $h_i(z)$ の微分を考える必要がある.)

以下，まず R が超楕円曲線でない場合を考える．このときは $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面 H と標準曲線 $C=\Phi_{|K|}(R)$ との交点を重複度をこめて $P_1, P_2, \cdots, P_{2g-2}$ と記し，この点から $g-1$ 個の点 $Q_1, \cdots, Q_{g-1}$ を選び $D=\sum_{j=1}^{g-1} Q_j$ とおくと，もし $l(D)=1$ であれば $\varphi(D)\in W_{\mathrm{reg}}^{g-1}$ である．このことから Gauss 写像 α の像 $\alpha(W_{\mathrm{reg}}^{g-1})$ の各点の逆像は有限個の点よりなることが分かる．$\alpha(W_{\mathrm{reg}}^{g-1})$ の Zariski 閉包は $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ と一致することに注意する．特に H を一般の位置にある $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面とすると H と C との交わりは相異なる $2g-2$ 個の点となり，かつこれらの点からどのように $g-1$ 個の点 $Q_1, \cdots, Q_{g-1}$ を選んでも $l\left(\sum_{j=1}^{g-1} Q_j\right)=1$ であることが容易に分かる．したがって Gauss 写像 α の次数は

$$\binom{2g-2}{g-1}=\frac{g(g+1)\cdots(2g-2)}{(g-1)!}$$

であることが分かる．また Gauss 写像 $\alpha\colon W_{\mathrm{reg}}^{g-1}\to\alpha(W_{\mathrm{reg}}^{g-1})\subset(\mathbb{P}^{g-1})^*$ の分岐点，すなわち，一般には $x, y\in W_{\mathrm{reg}}^{g-1}$, $x\neq y$，かつ $\alpha(x)=\alpha(y)$ となるような点 x, y が一致してしまう点 $\alpha(x)\in(\mathbb{P}^{g-1})^*$ は $\mathbb{P}^{g-1}$ の超平面 H で標準曲線 $C=\Phi_{|K|}(R)$ に接するものに1対1に対応している．これは Gauss 写像の分岐点の全体 B は標準曲線 $C\subset\mathbb{P}^{g-1}$ の双対多様体 C^*(C に接する超平面の全体が定める $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ の代数多様体)の Zariski 開集合であることが分かる．(C に接する超平面 H から定まる $2g-2$ 個の点(今の場合は少なくとも2点は重複している)からどのように $g-1$ 個の点を選んでも $l(D)\geqq 2$ となる可能性があるので $B=C^*$ とは限らない.) したがって B の $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ での Zariski 閉包 $\overline{B}$ を考えると

$$\overline{B}=C^*$$

であることが分かる．ところで，C^* の双対多様体 $(C^*)^*$ は C と一致することがよく知られている．$C\simeq R$ であったので，Riemann 面 R が $W^{g-1}\subset J(R)$ から復元できたことになる．主偏極を与える $J(R)$ の因子は W^{g-1} の平行移動である(定理 2.25)ので，Jacobi 多様体 $J(R)$ から R を一意的に見出すことができたことになる．(Gauss 写像は W^{g-1} の平行移動で変化しないこと

に注意する.)

以上で R が超楕円曲線でないときは $(J(R),\Theta)\simeq(J(\tilde{R}),\tilde{\Theta})$ であれば $R\simeq\tilde{R}$ であることが証明された. R が超楕円曲線のときは標準曲線 $C=\Phi_{|K|}(R)$ は $\mathbb{P}^{g-1}$ の次数 $g-1$ の非特異有理曲線であり, $\Phi_{|K|}\colon R\to C$ は次数 2 の写像であり $\Phi_{|K|}$ は $2g+2$ 個の分岐点 $\Phi_{|K|}(P_1),\cdots,\Phi_{|K|}(P_{2g+2})$ をもっている. この場合 Gauss 写像 $\alpha\colon W^{g-1}_{\mathrm{reg}}\to\alpha(W^{g-1}_{\mathrm{reg}})\subset(\mathbb{P}^{g-1})^*$ の分岐点の全体 B の Zariski 閉包 $\overline{B}$ は

$$\overline{B}=C^*\cup L_1^*\cup\cdots\cup L_{2g+2}^*$$

と書けることが上と類似の議論で示される. ここで C^* は C の双対多様体, L_1^* は点 $\Phi_{|K|}(P_i)\in\mathbb{P}^{g-1}$ を通る超平面の全体がなす $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ の超平面である. $\overline{B}$ の双対多様体を考えることによって C と $2g+2$ 個の点 $\Phi_{|K|}(P_1),\cdots,\Phi_{|K|}(P_{2g+2})$ が一意的に定まり, R は $C\simeq\mathbb{P}^1$ の $2g+2$ 個の点 $\Phi_{|K|}(P_1),\cdots,\Phi_{|K|}(P_{2g+2})$ で分岐する 2 重被覆として復元できる.

(b) 別 証

上で概略を述べた Andreotti による Torelli の定理の証明は幾何学的で分かりやすいが, 厳密に証明するには少し準備が必要である. ここでは Martens [64]による別証明を与えておこう. 他に Matsusaka [65], Weil [99]による証明がある.

まず, 定理 2.31 の十分条件をさらに詳しく次の形に定式化しておく.

定理 2.32 種数 g の閉 Riemann 面 R,R' の Jacobi 多様体を $J(R),J(R')$, それぞれのテータ因子を Θ,Θ', 点 $P_0\in R$, $P_0'\in R'$ を基点とする自然な写像(2.52)を $\varphi\colon R\to J(R)$, $\varphi'\colon R'\to J(R')$ と記す. 主偏極 Abel 多様体としての同型写像 $h\colon(J(R),[\Theta])\simeq(J(R'),[\Theta'])$ が与えられると次の事実が成立する.

(i)

$$\varphi'\circ f=\pm h\circ\varphi+c$$

が成立するような同型 $f\colon R\simeq R'$ と $J(R')$ の点 c が存在する.

(ii) $g\geqq 2$ と仮定する. R が超楕円曲線でなければ, (i)の f,c および符

号 $\pm$ は h, P_0, P_0' によって一意的に定まる．R が超楕円曲線であれば符号 $\pm$ は自由に選ぶことができ，f, c は h, P_0, P_0' および符号の選び方によって一意的に定まる．

［証明］　ここでは(i)を仮定して(ii)を示す．同型 $f\colon R \simeq R'$, $c \in J(R')$ 以外に(i)を満足する同型 $f'\colon R \simeq R'$, $c' \in J(R')$ が存在すると仮定する．まず

$$\varphi' \circ f = h \circ \varphi + c$$
$$\varphi' \circ f' = h \circ \varphi + c'$$

が成立したと仮定する．このとき任意の点 $P \in R$ に対して

$$\varphi'(f(P)) - \varphi'(f'(P)) = c - c'$$

が成立する．P 以外の任意の点 $Q \in R$ に対しても

$$\varphi'(f(Q)) - \varphi'(f'(Q)) = c - c'$$

が成立するので

$$\varphi'(f(P) + f'(Q)) = \varphi'(f'(P) + f(Q))$$

が成立する．Abel の定理(定理 2.16)より

$$f(P) + f'(Q) \sim f'(P) + f(Q) \tag{2.68}$$

が成立する．P, Q は任意の点でよいので，もし $f \neq f'$ であれば R' 上に次数 2，次元 1 以上の線型系が存在することを意味し，R' は超楕円曲線でなければならない．したがって，R が超楕円曲線でなければ $f = f'$ が成立し，$c = c'$ となることが分かる．一方，R' が超楕円曲線のときは**超楕円インヴォリューション**(hyperelliptic involution) $\iota\colon R' \to R'$ (すなわち，ι は位数 2 の自己同型かつ $R'/\langle\iota\rangle = \mathbb{P}^1$ が成立する)を使うと位数 2，次元 1 以上の線型系は $|Q' + \iota(Q')|$ で与えられ，かつこれに限ることが知られている．したがって，もし $f \neq f'$ であれば(2.68)より

$$f'(Q) = \iota(f(P))$$

が成立するが，P, Q は R の任意の 2 点であったので，これは矛盾である．よって R' が超楕円曲線のときも $f = f'$ が成立する．

また

$$\varphi' \circ f = -h \circ \varphi + c$$
$$\varphi' \circ f' = h \circ \varphi + c'$$

が成立する場合は上と同様にして $f=f'$, $c=c'$ であることが示される．次に

$$\varphi'\circ f=h\circ\varphi+c$$
$$\varphi'\circ f'=-h\circ\varphi+c'$$

が成立したと仮定する．上と同様の議論により R の任意の 2 点 P,Q に対して

$$f(P)+f'(P)\sim f(Q)+f'(Q)$$

が成立する．$f\neq f'$ であればこれは R' が超楕円曲線であることを意味し，かつ上の議論より

$$f'=\iota\circ f$$

であることが分かる．さらに R が超楕円曲線であれば $\varphi'\circ f=h\circ\varphi+c$ が成立すれば $\varphi'\circ(\iota\circ f)=-h\circ\varphi+c''$ となる．これより(ii)が成立することが分かる．

次に，定理 2.32(i)の証明をする．種数 g の閉 Riemann 面 R の Jacobi 多様体 $J(R)$ の部分多様体 X に対して

$$X^*=\varphi(K)-X \tag{2.69}$$

すなわち写像 $x\mapsto\varphi(K)-x$ による X の像を X^* と記す．また点 $a\in J(R)$ による平行移動 $t_a\colon J(R)\to J(R)$ による X の像を X_a と記す．すなわち

$$X_a=a+X. \tag{2.70}$$

また今までと同様に $1\leqq d\leqq g-1$ のとき $\varphi_d(R^{(d)})=W^d$ と記す．

補題 2.33 $J(R)$ の任意の点 a に対して

$$(W_a^{g-1})^*=W_{-a}^{g-1}$$

が成立する．

［証明］ 次数 $g-1$ の正因子 D に対して

$$D+E\sim K$$

となる次数 $g-1$ の正因子 E が存在する．Abel の定理より

$$\varphi(D)-a=-\varphi(E)+\varphi(K)-a$$

が成立する．D または E は任意に選ぶことができるので，左辺の D を任意に選ぶことによって $W^{g-1}-a=W_{-a}^{g-1}$ ができ，右辺の E を任意に選ぶことによって $\varphi(K)-(W^{g-1}+a)=(W_a^{g-1})^*$ ができ，

$$W_{-a}^{g-1} = (W_a^{g-1})^*$$

が成立する. ∎

補題 2.34　任意の $0 \leqq r \leqq g-1$ に対して

$$W_a^r \subset W_b^{g-1}$$

であるための必要十分条件は

$$a \in W_b^{g-1-r}$$

が成立することである.

[証明]　$a \in W_b^{g-1-r}$ であれば

$$a = \sum_{j=1}^{g-1-r} \varphi(P_j) + b$$

となる点 $P_1, \cdots, P_{g-1-r}$ がある. W_a^r の点は $\sum_{j=1}^{r} \varphi(Q_j) + a$ と書けるので

$$\sum_{j=1}^{r} \varphi(Q_j) + \sum_{j=1}^{g-1-r} \varphi(P_j) + b \in W_b^{g-1}$$

が成立し,

$$W_a^r \subset W_b^{g-1}$$

であることが分かる.

逆に $W_a^r \subset W_b^{g-1}$ が成立すると仮定する. すると次数 r の任意の正因子 D に対して $\varphi(D)+a=\varphi(\widehat{D})+b$ となる次数 $g-1$ の正因子 $\widehat{D}$ が存在する. 特に $\varphi(rP_0)=[0]$ であるので $a=\varphi(A)+b$ となる次数 $g-1$ の正因子 A が存在する. よって $\varphi(D)+\varphi(A)=\varphi(\widehat{D})$ が成立し, Abel の定理より

$$D + A \sim \widehat{D} + rP_0$$

が成り立つ. したがって

$$D + K - \widehat{D} \sim K - A + rP_0 \tag{2.71}$$

が成立する. 一方

$$A + B \sim K, \quad \widehat{D} + \widehat{B} \sim K \tag{2.72}$$

となるように $g-1$ 次の正因子 $B, \widehat{B}$ を選ぶことができるので, 式(2.71)の K にこの関係式(2.72)を代入することによって

$$D + \widehat{B} \sim B + rP_0$$

が成立する. D は次数 r の任意の正因子でよかったので, これより

$$l(B+rP_0) \geqq r+1$$

が成立することが分かる．（上の線型同値より，$|B+rP_0|$ を $R^{(g-1)}$ の閉部分多様体とみると，D が一般の次数 r の正因子であれば $\widehat{B}$ が一意的に定まるので，$R^{(r)}$ からこの閉部分多様体への写像 $D \mapsto D+\widehat{B}$ が定義できる．しかもこの写像の像は r 次元である．）Riemann–Roch の定理より

$$l(B+rP_0)-l(K-B-rP_0) = r$$

であるので

$$l(K-B-rP_0) \geqq 1$$

が成り立つ．したがって

$$\widetilde{B} \sim K-B-rP_0$$

となる $g-r-1$ 次の正因子 $\widetilde{B}$ が存在する．するとこの関係式の両辺に rP_0 を足し，(2.72)を使うと

$$\widetilde{B}+rP_0 \sim K-B \sim A$$

が成り立つことが分かる．よって

$$a = \varphi(A)+b = \varphi(\widetilde{B}+rP_0)+b = \varphi(\widetilde{B})+b$$

となり $a \in W_b^{g-1-r}$ であることが分かる．∎

補題 2.35 任意の $0 \leqq r \leqq g-1$ に対して

$$W^{g-1-r} = \bigcap_{a \in W^r} W_{-a}^{g-1}$$

$$(W^{g-1-r})^* = \bigcap_{a \in W^r} W_a^{g-1}$$

が成立する．

［証明］ 補題 2.34 より

$$W^{g-1-r} \subset W_{-a}^{g-1} \iff W_a^{g-1-r} \subset W^{g-1} \iff a \in W^r$$

が成り立つ．したがって

$$W^{g-1-r} \subset \bigcap_{a \in W^r} W_{-a}^{g-1}$$

が成立する．逆に $u \in \bigcap_{a \in W^r} W_{-a}^{g-1}$ をとると，任意の $a \in W^r$ に対して $u = \varphi(D_a)-a$ となる次数 $g-1$ の正因子 D_a が存在する．$a = \varphi(D_a)-u$ となるので $a \in W_{-u}^{g-1}$ が成立する．したがって $W^r \subset W_{-u}^{g-1}$ となり，これは $W_u^r \subset$

W^{g-1} と同値であるが，補題 2.34 より $u \in W^{g-1-r}$ であることが分かる．したがって

$$\bigcap_{a \in W^r} W_{-a}^{g-1} \subset W^{g-1-r}$$

が成立する．よって最初の等式が証明された．

2 番目の等式に関しては，補題 2.33 および最初の等式より

$$\bigcap_{a \in W^r} W_a^{g-1} = \bigcap_{a \in W^r} (W_{-a}^{g-1})^* = \left(\bigcap_{a \in W^r} W_{-a}^{g-1} \right)^* = (W^{g-1-r})^*$$

が成立することが分かる． ∎

補題 2.36　任意の $0 \leqq r \leqq g-2$ と $b = a+x-y$ を満足する任意の $a, b \in J(R)$，$x \in W^1 = \varphi(R)$，$y \in W^{g-1-r}$ に対して

$$W_a^{r+1} \subset W_b^{g-1}$$

が成立するかあるいは

$$W_a^{r+1} \cap W_b^{g-1} = W_{a+x}^r \cup S,$$
$$S = W_a^{r+1} \cap (W_{y-a}^{g-2})^*$$

が成立する．

［証明］ $x = \varphi(P)$，$y = \varphi(E)$ と書く．P は R の点，E は $g-1-r$ 次の正因子である．仮定より

$$a + \varphi(P) = b + \varphi(E) \tag{2.73}$$

が成り立つ．もし $E \geqq P$ であれば $E = E' + P$ と記すと $a = \varphi(E') + b$ となり，$a \in W_b^{g-2-r}$ が成り立つ．すると補題 2.34 より $W_a^{r+1} \subset W_b^{g-1}$ が成立する．したがって以下，P は E に含まれないと仮定する．

点 $u \in W_a^{r+1} \cap W_b^{g-1}$ に対して

$$u = \varphi(D) + a = \varphi(\widehat{D}) + b$$

となる次数 $r+1$ の正因子 D と次数 $g-1$ の正因子 $\widehat{D}$ が存在する．(2.73)より $b = a + \varphi(P) - \varphi(E)$ であったので，

$$\varphi(D) + a = \varphi(\widehat{D}) + \varphi(P) - \varphi(E) + a$$

となり，

$$\varphi(D)+\varphi(E)=\varphi(\widehat{D})+\varphi(P)$$

が成立する．Abel の定理より

$$D+E\sim\widehat{D}+P$$

が成立する．もし $D+E=\widehat{D}+P$ であれば $D\geqq P$ であり，$D=D'+P$, D' は次数 r の正因子，と書け，$u=\varphi(D)+a=\varphi(D')+\varphi(P)+a$ となり

$$u\in W^r_{a+x}$$

となる．もし $D+E\neq\widehat{D}+P$ であれば $l(D+E)\geqq 2$ となり任意の点 $Q\in R$ に対して $l(D+E-Q)\geqq 1$ となる．したがって

$$D+E\sim Q+\widehat{Q}$$

となる次数 $g-1$ の正因子 $\widehat{Q}$ が存在する．すると

$$\begin{aligned}u&=\varphi(D)+a=\varphi(\widehat{Q})+\varphi(Q)-\varphi(E)+a\\&=\varphi(\widehat{Q})+a-y+\varphi(Q)\end{aligned}$$

が成り立ち，補題 2.35 の 2 番目の等式より

$$u\in\bigcap_{d\in W^1}W^{g-1}_{a-y+d}=\left(\bigcap_{d\in W^1}W^{g-1}_d\right)_{a-y}=(W^{g-2})^*_{a-y}$$

が成立する．$(W^{g-2})^*_{a-y}=(W^{g-2}_{y-a})^*$ であり，$u\in W^{r+1}_a$ であったので

$$u\in W^{r+1}_a\cap(W^{g-2}_{y-a})^*=S$$

である．したがって

$$W^{r+1}_a\cap W^{g-1}_b\subset W^r_{a+x}\cup S$$

が示された．一方 $x=\varphi(P)$, $P\in R$ であるので

$$W^r_{a+x}\subset W^{r+1}_a.$$

また $a+x=b+y$ かつ $y=\varphi(E)\in W^{g-1-r}$ であるので

$$W^r_{a+x}=W^r_{b+y}\subset W^{g-1}_b$$

が成立する．さらに $W^{g-2}_{y-a}\subset W^{g-1}_{y-a-x}$, $-b=y-a-x$ および補題 2.33 より

$$(W^{g-2}_{y-a})^*\subset(W^{g-1}_{y-a-x})^*=W^{g-1}_b$$

が成立する．したがって

$$W^r_{a+x}\cup S\subset W^{r+1}_a\cap W^{g-1}_b$$

が成立する．∎

以上の準備のもとで，いよいよ定理 2.32(i)の証明にとりかかろう．同型写像 $g\colon (J(R),[\Theta])\simeq(J(R'),[\Theta'])$ によって $J(R)$ と $J(R')$ とを同一視する．以下 $\varphi_r\colon R^{(r)}\to J(R)$ の像を今まで通り W^r と記し，$\varphi'_r\colon R^{(r)\prime}\to J(R')=J(R)$ の像を V^r と記すことにする．我々の仮定は W^{g-1} は V^{g-1} の平行移動である，すなわち

$$W^{g-1}=V^{g-1}_c \tag{2.74}$$

となる点 $c\in J(R)$ が存在することである．定理を証明するには，この仮定のもとで V^1 は W^1 もしくは $(W^1)^*$ の平行移動であることを示せばよい．それには V^1 のある平行移動が W^{r+1} または $(W^{r+1})^*$ に含まれるという条件を満たす最小の r が 0 であることを示せばよい．$V^{g-1}=W^{g-1}_{-c}$ であり，$V^1\subset V^{g-1}$ であるので $r\leqq g-2$ である．そこで $r\geqq 1$ として矛盾することを示そう．

必要ならば同型写像 h を $-h$ に変えることによって $V^1\subset W^{r+1}_a$ と仮定しても一般性を失わない．点 $x\in W^1$, $y\in W^{g-1-r}$ を任意に選んで $b=a+x-y$ とおく．もし $W^{r+1}_a\subset W^{g-1}_b$ でなければ補題 2.36 より

$$V^1\cap W^{g-1}_b=V^1\cap W^{r+1}_a\cap W^{g-1}_b=(V^1\cap W^r_{a+x})\cup(V^1\cap S),$$
$$S=W^{r+1}_a\cap(W^{g-2}_{y-a})^*$$

が成立する．W^r_{a+x} は x のみに依存し，$(W^{g-2}_{y-a})^*$ は y のみに依存する．

さて点 $x\in W^1$ を固定し，$y\in W^{g-1-r}$ を動かして考える．このとき，ほとんどすべての $y\in W^{g-1-r}$ に対して $V^1\not\subset W^{g-1}_b$ であること，したがって $W^{r+1}_a\not\subset W^{g-1}_b$ であることを示そう．y が W^{g-1-r} のすべての点を動くと $-b=-a-x+y$ は $W^{g-1-r}_{-(a+x)}$ のすべての点を動く．したがってすべての点 $-b\in W^{g-1-r}_{-(a+x)}$ に対して $V^1\subset W^{g-1}_b$ であれば補題 2.35 より

$$V^1\subset\bigcap_{-b\in W^{g-1-r}_{-(a+x)}}W^{g-1}_b=\left(\bigcap_{-b+(a+x)\in W^{g-1-r}}W^{g-1}_{b-(a+x)}\right)_{(a+x)}=W^r_{(a+x)}$$

が成立する．これは r のとりかた(r は $V^1\subset W^{r+1}_a$ が成立する最小の自然数であった)に反する．したがって

$$V^1 \not\subset W_b^{g-1}$$

となるbが存在する．するとこのbの近くの点に関しても同じことが成立するのでほとんどすべてのbに対して，したがってほとんどすべての$y \in W^{g-1-r}$に対して$V^1 \not\subset W_b^{g-1}$であることが分かる．ところで補題2.34より$V^1 \subset W_b^{g-1} = V_{b+c}^{g-1}$であるための必要十分条件は$-b \in V_c^{g-2}$である．したがって，以上の議論によって$V_c^{g-2} \not\subset W_{-(a+x)}^{g-1-r}$であり，$V_c^{g-2} \cap W_{-(a+x)}^{g-1-r}$は$W_{-(a+x)}^{g-1-r}$の$V^1 \subset W_b^{g-1}$となる点$-b$全体からなる次元の低い部分多様体であることが分かる．

これまでの議論によってほとんどすべての$y \in W^{g-1-r}$に対して

$$V^1 \cap W_b^{g-1} = (V^1 \cap W_{a+x}^r) \cup (V^1 \cap S) \tag{2.75}$$

が成り立つことが分かる．ここでaを固定すればW_{a+x}^rはxにのみ依存し，Sはyにのみ依存することに注意する．

そこで$V^1 \cap W_{a+x}^r$は高々1点を含むことを示そう．補題2.22を幾何学的に解釈すると，$V^1 \not\subset W_b^{g-1} = V_{b+c}^{g-1}$であれば$R' = R$上の次数$g$の正因子$D(b)$で

$$\varphi'(D(b)) = b + k' \tag{2.76}$$

なるものが存在することが分かる．ここでk'はbには関係しないR'のRiemann定数が定める$J(R') = J(R)$の点である．また

$$D(b) = \varphi'^{-1}(V^1 \cdot W_b^{g-1}) \tag{2.77}$$

である．ここで$V^1 \cdot W_b^{g-1}$はV^1とW_b^{g-1}の交わりを重複度をこめて考えた0サイクルであり，φ'^{-1}はサイクルとしての引き戻しを意味する．

$$W_{a+x}^r \subset W_{a+x-y}^{g-1} = W_b^{g-1} \tag{2.78}$$

であるので(点$u \in W_{a+x}^r$は$u = \varphi(D) + a + x$と次数rの正因子Dを使って表され，また$y = \varphi(E)$, Eは次数$g-1-r$の正因子，と書けるので，$u = \varphi(D+E) + a + x - y \in W_{a+x-y}^{g-1}$)，もし$V^1 \cap W_{a+x}^r$が2点以上からなれば0サイクル$V^1 \cdot W_b^{g-1}$は$b$が動くとき，(2.75)より少なくとも2個の点を固定成分として含んでいる．したがってbを動かすと，$\varphi'(D(b))$はV^{g-2}を平行移動した$V_{c''}^{g-2}$の中を動く．$-b \in W_{-(a+x)}^{g-1-r}$であるので(2.76)より$(W^{g-1-r})^*$は$V^{g-2}$のある平行移動$V_{c'}^{g-2}$に含まれることが分かる．したがって(2.74)より

$$\bigcap_{u\in V_{c'}^{g-2}} V_{c-u}^{g-1} \subset \bigcap_{u\in (W^{g-1-r})^*} W_{-u}^{g-1}$$

が成立するが，補題 2.35 を R', R に適用すると

$$V_c^1 \subset W^r$$

が成立する．これは r のとりかたに反する．よって $V^1\cap W_{a+x}^r$ は高々1点よりなる．

一方 $y\in W^{g-1-r}$ を固定して $x\in W^1$ を動かすと $b=a+x-y$ および(2.76)より0サイクル $V^1\cdot W_b^{g-1}$ は動くことが分かる．もし $V^1\cap W_{a+x}^r=\varnothing$ であれば補題 2.36 より $V^1\cap W_b^{g-1}\subset V^1\cap S=V^1\cap W_a^{r+1}\cap(W_{y-a}^{g-2})^*$ となり a,y は固定されているので $V^1\cdot W_b^{g-1}$ は動かない．したがって $V^1\cap W_{a+x}^r$ は少なくとも1点を含むことが分かり，上の議論と併せて $V^1\cap W_{a+x}^r$ はちょうど1点よりなることが分かる．しかも，上の議論からほとんどの y に対して $D(b)$ は $V^1\cap W_{a+x}^r$ の点を重複度1で含んでいることが分かる．

この事実と補題 2.36 より $x,x'\in W^1$, $y\in W^{g-1-r}$ をうまく選ぶと

$$D(a+x-y) = Q+\widehat{D}$$
$$D(a+x'-y) = Q'+\widehat{D}$$

$Q,Q'\in R'$, $\widehat{D}$ は Q,Q' を含まない R' 上の次数 $g-1$ の正因子であるようにできる(すなわち $Q=\varphi'^{-1}(V^1\cap W_{a+x})$, $Q'=\varphi'^{-1}(V^1\cap W_{a+x'})$, $\widehat{D}=\varphi'^{-1}(V^1\cdot S)$ ととればよい)．すると(2.76)より

$$\varphi'(Q)-\varphi'(Q') = x-x'$$

となる．これより $\varphi'(Q)+c''=x$, $\varphi'(Q')+c''=x'$ となる点 $c''\in J(R')$ が存在することが分かる．$Q,Q'\in R'$, $x,x'\in W^1$ であるので W^1 は V^1 のある平行移動 $V_{c''}^1$ と2点 x,x' を共有することが分かる．

一方，相異なる2点 $x,x'\in W^1$ に対して $r=g-2$, $a=-x$, $y=x'\in W^1$ とおくと，$b=a+x-y=-x'$ となるので補題 2.36 より

(2.79) $$W_{-x}^{g-1}\cap W_{-x'}^{g-1} = W^{g-2}\cup (W_{x+x'}^{g-2})^*$$

が成立する．一方補題 2.35 より

$$V^{g-2}=\bigcap_{u\in V^1}V^{g-1}_{-u}$$

であるので，任意の点 $u\in V^1$ に対して

$$V^{g-2}\subset V^{g-1}_{-u}$$

を得る．そこで，$W^1\cap V^1_{c''}\supset\{x,x'\}$ であるので $x=u+c''$, $x'=u'+c''$ であるように $u,u'\in V^1$ をとると

$$V^{g-2}_{-c''}\subset V^{g-1}_{-u-c''}\cap V^{g-1}_{-u'-c''}=V^{g-1}_{-x}\cap V^{g-1}_{-x'}$$

が成立する．$W^{g-1}=V^{g-1}_c$ と仮定したので(式(2.74))

$$V^{g-2}_{c-c''}\subset W^{g-1}_{-x}\cap W^{g-1}_{-x'}$$

が成立することが分かり(2.79)より $V^{g-2}_{c-c''}$ は W^{g-2} または $(W^{g-2}_{x+x'})^*$ に含まれることが分かる．これらは $g-2$ 次元の既約代数多様体であるので $V^{g-2}_{c-c''}=W^{g-2}$ または $V^{g-2}_{c-c''}=(W^{g-2}_{x+x'})^*$ が成立する．

まず $V^{g-2}_{c-c''}=W^{g-2}$ のときを考える．補題 2.35 より

$$V^1=\bigcap_{a\in V^{g-2}}V^{g-1}_{-a}$$

が成立するので(2.74)および補題 2.35 を使うと

$$V^1_{c''}=\bigcap_{a\in V^{g-2}}V^{g-1}_{-a+c''}=\bigcap_{w\in V^{g-2}_{c-c''}}V^{g-1}_{-w+c}=\bigcap_{w\in W^{g-2}}W^{g-1}_{-w}=W^1$$

を得る．これは $r\geqq 1$ に矛盾する．また $V^{g-2}_{c-c''}=(W^{g-2})^*$ のときは $V^{g-2}=-W^{g-2}_{a'}$ と書けるので補題 2.35 の 2 番目の等式を使うことによって V^1 は $(W^1)^*$ のある平行移動と一致することを上と同様の論法で示すことができ，この場合も $r\geqq 1$ に矛盾する．以上によって $r=0$ であることが分かり，定理は証明された． ∎

上の証明では背理法を用いたが，実際には $V^1\subset W^{r+1}_a$ であれば $V^1\subset W^r_{a'}$, $V^1=W^1_{a''}$ または $V^1=(W^1_{a'''})^*$ が成立することを証明は示している．したがって上の論法を繰り返すことによって背理法を使わずに定理を証明することができる．

§2.4　周期写像

今までは主として一つの閉 Riemann 面を考察してきたが，これから閉 Riemann 面の複素解析族と対応する Jacobi 多様体の族を考察し，次章の Hodge 構造の変形理論への入門とする．

(a)　閉 Riemann 面のモジュライ空間

種数 $g \geqq 2$ の閉 Riemann 面 R に関しては $H^2(R,\Theta)=0$, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(R,\Theta)=3g-3$ が成立するので $3g-3$ 次元の複素多様体 W 上に倉西族 $\pi\colon \mathcal{R}\to W$ が存在することが分かる．$0\in W$, $\pi^{-1}(0)=R$ と仮定しよう．$H^0(R,\Theta)=0$ であるので，この倉西族は W の各点で普遍的であることが定理 1.6 より分かる．閉 Riemann 面 R の自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ は有限群であり，$\mathrm{Aut}(R)$ は W の点 0 の近くに解析的自己同型群として作用する．$\mathrm{Aut}(R)$ が W へ作用するように W を十分小さくとっておく．すると $W/\mathrm{Aut}(R)$ が種数 g の閉 Riemann 面のモジュライ空間の R に対応する点の近傍を与える．

種数 g の閉 Riemann 面のモジュライ空間を大域的に構成するには代数幾何学的には幾何学的不変式論を使う必要があり，複素解析的に構成するには Teichmüller 空間を使う必要がある．種数 g の閉 Riemann 面の Teichmüller 空間 $\mathbb{T}_g$ は次のように定義される．

種数 g の閉 Riemann 面 R_0 を一つ固定する．任意の種数 g の閉 Riemann 面 R と R_0 から R への向きを保つ同相写像のホモトピー類 H の対 (R,H) を考える．(R,H) と (R',H') との同値関係 $\sim$ を

$$(R,H)\sim(R',H') \iff H'\circ H^{-1} \text{ が } R \text{ から } R' \text{ への正則同型写像を含む}$$

と定義する．ここで $H'\circ H^{-1}$ は $h'\circ h^{-1}$, $h'\in H'$, $h\in H$ の全体を意味する．このとき集合としては

$$\mathbb{T}_g=\{(R,H)\}/\sim$$

と定義する．$H^{0,1}_{\bar\partial}(R_0,\Theta)$ の元を与える $(0,1)$ 型式 $\mu\dfrac{\partial}{\partial z}d\bar z$ に対して $\|\mu\|_\infty<1$ であれば閉 Riemann 面 R と

$$h_{\bar z}=\mu h_z \tag{2.80}$$

を満足する h を含む R_0 から R への向きを保つ同相写像のホモトピー類 H が存在することが分かる．（実際には条件をゆるくして，μ は可測かつ $\|\mu\|_\infty<1$ である場合を考える必要がある．）式(2.80)は Beltrami の微分方程式と呼ばれるが，これは実質的には補題 1.17 に現れた方程式に他ならない．(2.80)は複素構造を定義する式と考えることができるわけである．このことから Teichmüller 空間が R_0 の複素構造の変形と関係していることが推測できよう．

Teichmüller 空間 $\mathbb{T}_g$ には複素構造を入れることができ，$g=1$ のときは上半空間 H に正則同型，$g\geqq 2$ のときは $\mathbb{C}^{3g-3}$ 内の有界領域に正則同型であることが知られている．$H_1(R_0,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ を一つ固定すると (R,H) に対して

$$\{H(\alpha_1),\cdots,H(\alpha_g),H(\beta_1),\cdots,H(\beta_g)\}$$

は $H_1(R,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底である．このとき R 上の正則 1 次微分型式の基底 $\{\omega_1,\cdots,\omega_g\}$ を

$$\int_{H(\beta_i)}\omega_j=\delta_{ij},\quad 1\leqq i,j\leqq g$$

であるように選ぶと Siegel 上半空間の点

$$\left(\int_{H(\alpha_i)}\omega_j\right)\in\mathfrak{S}_g$$

が一意的に定まる．しかもこの点は (R,H) の同値類のみに依存する．したがって写像

$$\begin{array}{cccc}\tau: & \mathbb{T}_g & \longrightarrow & \mathfrak{S}_g\\ & [(R,H)] & \longmapsto & \left(\displaystyle\int_{H(\alpha_i)}\omega_j\right)\end{array}$$

が定義できる．Teichmüller 空間 $\mathbb{T}_g$ の複素構造はこの写像 τ が正則写像になる唯一つの複素構造であることが知られている．正則写像 τ は $H_1(R_0,\mathbb{Z})$ の

シンプレクティック基底のとり方に依存するが，基底のとり替えは $Sp(2g,\mathbb{Z})$ の元で表されるので，基底のとり替えによる写像 τ の違いは $Sp(2g,\mathbb{Z})$ の元 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ を使って

$$(\alpha\tau+\beta)(\gamma\tau+\delta)^{-1}$$

と表示することができる．

ところで，R_0 から自分自身への向きを保つ同相写像のホモトピー類 H_0 と R_0 の対 (R_0, H_0) の全体を $\mathbf{Mod}_g$ と記すと，これは写像の合成によって群になる．すなわち

$$(R_0, H_0)\cdot(R_0, H_1) = (R_0, H_0 \circ H_1)$$

と積を定義する．$\mathbf{Mod}_g$ の元 (R_0, H_0) は $[(R,H)]\in\mathbb{T}_g$ に

$$(R_0, H_0)\cdot[(R,H)] = [(R, H\circ H_0^{-1})]$$

によって左から作用する．この作用は $\mathbb{T}_g$ から $\mathbb{T}_g$ への正則写像を与える．$\mathbf{Mod}_g$ の $\mathbb{T}_g$ への作用は真性不連続であり，商空間 $\mathfrak{M}_g = \mathbf{Mod}_g\backslash\mathbb{T}_g$ は種数 g の閉 Riemann 面のモジュライ空間になっている．$\mathfrak{M}_g = \mathbf{Mod}_g\backslash\mathbb{T}_g$ は正規解析空間である．

$\mathbb{T}_g$ 上に種数 g の閉 Riemann 面の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{R}\to\mathbb{T}_g$ が存在し，$\mathbb{T}_g$ の各点で普遍的であることに注意する．$g=1$ のときはこの族は例 1.1 で与えた楕円曲線の複素解析族に他ならない．しかしモジュライ空間 $\mathfrak{M}_g$ 上には複素解析族は存在しない．これは，閉 Riemann 面が正則自己同型をもつことがあることに由来する．代数幾何学的にはこのことは種数 g の代数曲線のモジュライ函手が表現可能でなく，**粗なモジュライ空間**(coarse moduli space) しか存在しないことに対応している．

(b) 周期写像

種数 g の閉 Riemann 面の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{R}\to W$ に対して点 $0\in W$ を選び $R_0=\pi^{-1}(0)$ とおく．$H_1(R_0,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ を一つ選ぶ．0 の単連結な小近傍 U_0 を選ぶと，$\pi^{-1}(U_0)$ は可微分多様体として $U_0\times R_0$ と可微分同相であるように選ぶことができる．この可微分同相写像によって $H_1(R_0,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ は

$H_1(R_u,\mathbb{Z})$, $R_u=\pi^{-1}(u)$, $u\in U_0$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1(u),\cdots,\alpha_g(u),\beta_1(u),\cdots,\beta_g(u)\}$ を定める．また U_0 上の相対 1 次微分型式の空間 $H^0(\pi^{-1}(U_0),\Omega^1_{\pi^{-1}(U_0)/U_0})$ から $\omega_1,\cdots,\omega_g$ を $\{\omega_1(u)=\omega_1|\pi^{-1}(u),\ \cdots,\ \omega_g(u)=\omega_g|\pi^{-1}(u)\}$, $u\in U_0$, が R_u の正則 1 次微分型式の基底になるように選ぶことが，U_0 を十分小さくとっておけば可能である．このとき対応

$$u\longmapsto\left(\int_{\alpha_i(u)}\omega_j(u)\right)\left(\int_{\beta_i(u)}\omega_j(u)\right)^{-1}$$

は正則写像 $p_{U_0}\colon U_0\to\mathfrak{S}_g$ を定める．この写像は基点 $0\in U_0$ のシンプレクティック基底の取り方にだけ依存する．写像 p_{U_0} は U_0 を越えて解析接続できる．任意に点 $w\in W$ を選び 0 と w とを道 γ で結ぶと，γ に沿って局所的に族を可微分多様体として自明化することができる．すなわち $w_0=0$, w_1, $\cdots$, $w_n=w$ と γ 上に点をとり，w_i を中心とした単連結小近傍 U_i をとると，$\pi^{-1}(U_i)$ は可微分多様体として $U_i\times R_{w_i}$ と可微分同相にできる．$U_i\cap U_{i+1}\neq\varnothing$ であるように $w_0,w_1,\cdots,w_n$ を十分にたくさんとっておくと，この自明化を使って $H_1(R_0,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ から $H_1(R_w,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1(w),\cdots,\alpha_g(w),\beta_1(w),\cdots,\beta_g(w)\}$ が一意的に定まる．ただし，この基底は道 γ のとり方に依存する．また $p_{U_0}\colon U_0\to\mathfrak{S}_g$ から $p_{U_1}\colon U_1\to\mathfrak{S}_g$, $p_{U_2}\colon U_2\to\mathfrak{S}_g$ と次々に解析接続していくことができ，最後に $w=w_n$ の近傍 U_n から $\mathfrak{S}_g$ への正則写像 $p_{U_n}\colon U_n\to\mathfrak{S}_g$ を得る．この正則写像は $H_1(R_w,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底に依存するので，解析接続は 0 と w とを結ぶ道のとり方に依存する．以上の説明で次の命題は今や明らかであろう．

命題 2.37　種数 g の閉 Riemann 面の複素解析族 $\pi\colon\mathcal{R}\to W$ に対して W の点 0 を固定する．このとき W の普遍被覆空間 $\widetilde{W}$ から g 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ への正則写像

$$\widetilde{p}\colon\widetilde{W}\longrightarrow\mathfrak{S}_g$$

と W の基本群 $\pi_1(W,0)$ から $Sp(2g,\mathbb{Z})$ への群の準同型写像

$$\Phi\colon\ \pi_1(W,0)\longrightarrow Sp(2g,\mathbb{Z})$$

で以下の条件を満足するものが存在する．

（1）　$w \in W$ 上にある $\widetilde{W}$ の任意の点 $\widetilde{w}$ に対して $\begin{pmatrix} \widetilde{p}(\widetilde{w}) \\ I_g \end{pmatrix}$ は Riemann 面 R_w の周期行列である．

（2）　$\pi_1(W,0)$ を $\widetilde{W}$ の普遍被覆群とみると，$h \in \pi_1(W,0)$ に対して

$$\widetilde{p}(h \cdot \widetilde{w}) = \Phi(h) \cdot \widetilde{p}(\widetilde{w}) = (\alpha_h \widetilde{p}(\widetilde{w}) + \beta_h)(\gamma_h \widetilde{p}(\widetilde{w}) + \delta_h)^{-1},$$

$$\Phi(h) = \begin{pmatrix} \alpha_h & \beta_h \\ \gamma_h & \delta_h \end{pmatrix}, \quad \widetilde{w} \in \widetilde{W}$$

が成立する．

さらに，このような $(\widetilde{p}, \Phi)$ は $Sp(2g,\mathbb{Z})$ の作用を除いて一意的に定まる．すなわち $(\widetilde{p}', \Phi')$ も上の条件(1)，(2)を満足すれば

$$\widetilde{p}' = M \cdot \widetilde{p} = (\alpha \widetilde{p} + \beta)(\gamma \widetilde{p} + \delta)^{-1}$$

$$\Phi' = M \Phi M^{-1}$$

を満足する

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(2g,\mathbb{Z})$$

が存在する．　□

写像 $\widetilde{p}\colon \widetilde{W} \to \mathfrak{S}$ を複素解析族 $\pi\colon \mathcal{R} \to W$ が定める**周期写像**という．この周期写像から正則写像

$$p\colon W \longrightarrow Sp(2g,\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}$$

が一意的に定まる．この写像も周期写像ということが多い．

さて種数 g の閉 Riemann 面 R に対して R の倉西族 $\pi\colon \mathcal{R} \to W$ を考えよう．ただし $\pi^{-1}(w_0) = R$, $w_0 \in W$ とする．このとき倉西族が W の各点で普遍的であることは定理 1.6 の帰結である．W を十分小さくとっておくと，R の正則自己同型群 $\mathrm{Aut}(R)$ が W に作用し $W/\mathrm{Aut}(R)$ の各点は相異なる閉 Riemann 面 R に対応する．周期写像 $W \to Sp(g,\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}_g$ は $W/\mathrm{Aut}(R) \to Sp(g,\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}_g$ への正則写像を引き起こす．したがって種数 g の閉 Riemann 面のモジュライ空間 $\mathfrak{M}_g$ から g 次元主偏極 Abel 多様体のモジュライ空間 $\mathcal{A}_g = Sp(g,\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{S}_g$ への正則写像

$$j\colon \mathfrak{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g$$

が定義できる．この写像が単射であることが Torelli の定理の主張するところである．j は $g=1$ であれば同型写像，$g=2$ であれば $\mathcal{A}_2\setminus j(\mathfrak{M}_2)$ の各点は 2 本の楕円曲線 E_1, E_2 の直積 $E_1\times E_2$ に因子 $a_1\times E_2+E_1\times a_2$ で偏極構造を入れたものに対応する．$g=3$ のときも $\mathcal{A}_3\setminus j(\mathfrak{M}_3)$ の各点は次元の低い主偏極 Abel 多様体の直積に対応している．$g\geqq 4$ のとき $\dim\mathfrak{M}_g=3g-3<\dim\mathcal{A}_g=\dfrac{g(g+1)}{2}$ となる．$j(\mathfrak{M}_g)$ での閉包は部分代数多様体となるが，$\overline{j(\mathfrak{M}_g)}$ を特徴づけよというのが **Schottky 問題**(Schottky's problem)である．Schottky は $g=4$ のとき $\overline{j(\mathfrak{M}_g)}$ はある Siegel モジュラー型式の零点として特徴づけられることを予想し，井草準一によって予想が正しいことが証明された．（$\dim\mathfrak{M}_4=9$, $\dim\mathcal{A}_4=10$ であるので $\overline{j(\mathfrak{M}_g)}$ は余次元 1 である．）$g\geqq 5$ のときも $\overline{j(\mathfrak{M}_g)}$ の種々の特徴づけが考えられている．Andreotti–Mayer による定理 2.30 はテータ因子の特異点の次元が $g-4$ 次元である点全体の閉包 $\mathcal{N}_g$ は $\overline{j(\mathfrak{M}_g)}$ を含むことを示しているが，$\mathcal{N}_g$ の既約成分の一つが $\overline{j(\mathfrak{M}_g)}$ と一致することが知られている．Schottky 問題については Donagi [25] を参照されたい．

ところで，種数 g の閉 Riemann 面の複素解析族 $\pi\colon \mathcal{R}\to W$ に対して $R^1\pi_*\mathbb{C}$ は W 上の局所定数層である．$R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W$ は階数 $2g$ の局所自由層であり，対応するベクトル束の変換函数は定数行列にとることができる．したがって $R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W$ に W 上の外微分 d_W が定義できて完全列

$$0\longrightarrow R^1\pi_*\mathbb{C}\longrightarrow R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W\xrightarrow{d_W}\Omega^1_W\otimes(R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W)$$

ができる．$d_W=0$ は $R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W$ の中の平坦な切断($R^1\pi_*\mathbb{C}$ の切断)を定める．通常 d_W を ∇ と記して $R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W$ の **Gauss–Manin 接続**(Gauss-Manin connection)と呼ぶ．Gauss–Manin 接続 ∇ は**平坦**(flat)な接続である．すなわち $\nabla\circ\nabla=0$ を満足する．

一方，相対正則 1 次微分型式のなす層 $\omega_{\mathcal{R}/W}$ の π による順像 $\pi_*\omega_{\mathcal{R}/W}$ は階数 g の局所自由層であり，de Rham の定理により $R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W$ に減少フィルターを導入することができる．これが重さ 1 の Hodge 構造の変形であることは次章で述べる．W の開集合 U 上の切断 $\omega\in H^0(U,\pi_*\omega_{\mathcal{R}/W})=H^0(\pi^{-1}(U),\omega_{\mathcal{R}/W})$ は $H^0(U,R^1\pi_*\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_W)$ の元を定める．この元が平坦であ

る条件 $\nabla\omega=0$ を $R^1\pi_*\mathbb{C}$ の基底を選んで書くことができる．実際はベクトル値の微分方程式ではなく，1 変数の $2g$ 階の微分方程式として記すことが多い．また基底は通常は点 $u_0\in U$ を固定してファイバー $R_{u_0}=\pi^{-1}(u_0)$ の $H_1(R_{u_0},\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_g,\beta_1,\cdots,\beta_g\}$ をもとにしてその双対基底を $H^1(R_{u_0},\mathbb{C})=H^1(R_{u_0},\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ の基底として選ぶことが多い．$\{\alpha_1(u),\cdots,\alpha_g(u),\beta_1(u),\cdots,\beta_g(u)\}$ を $R_1\pi_*\mathbb{Z}|U=\bigcup_{u\in U}H_1(R_u,\mathbb{Z})$ の基底(U が単連結でなければ多価の基底，すなわち U 上の族を U の普遍被覆空間 $\widetilde{U}$ に引き戻して，そこでの $R_1\widetilde{\pi}_*\mathbb{Z}|\widetilde{U}$ の基底を考える)にとると，双対基底による $\omega\in H^0(U,\pi_*\omega_{\mathcal{R}/W})$ の表現は

$$
{}^t\left(\int_{\alpha_1(u)}\omega(u),\cdots,\int_{\alpha_g(u)}\omega(u),\int_{\beta_1(u)}\omega(u),\cdots,\int_{\beta_g(u)}\omega(u)\right)
$$

となる．したがって Gauss–Manin 接続が定める微分方程式は $2g$ 次元ベクトル値 1 次微分方程式であり，これを 1 変数の微分方程式に書き換えれば $\int_{\alpha_i(u)}\omega(u)$ や $\int_{\beta_i(u)}\omega(u)$ が満足する $2g$ 階微分方程式となる．この微分方程式を **Picard–Fuchs 方程式**(Picard-Fuchs equation)と呼ぶ．特に W が複素多様体 $\overline{W}$ の開集合，かつ $\overline{W}\setminus W$ が正規交叉因子であり，$\overline{W}$ 上に族 $\pi\colon\mathcal{R}\to W$ が複素解析族とは限らないが複素多様体の間の固有な正則写像 $\pi\colon\overline{\mathcal{R}}\to\overline{W}$ として拡張できるとき，Picard–Fuchs 方程式は $\overline{W}\setminus W$ で確定特異点をもつことが知られている．これについても次章で簡単に触れる．

例 2.38　例 1.12 の楕円曲線の族

$$
y^2=x(x-1)(x-\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}
$$

を考える．λ を固定すると

$$
\omega=\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}
$$

が楕円曲線 $E_\lambda\colon y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ の正則 1 次微分型式である．

$$
\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}=\frac{dx}{2\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)^3}},\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda^2}=\frac{3dx}{4\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)^5}}
$$

は E_λ の有理型微分型式であるが，拡張された de Rham の定理によりこれら

は $H^1(E_\lambda, \mathbb{C})$ の元を定める．したがって ω, $\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}$, $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\lambda^2}$ が定める $H^1(E_\lambda, \mathbb{C})$ の元は 1 次従属である．

$$\lambda(\lambda-1)\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda^2}+(2\lambda-1)\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}+\frac{1}{4}\omega=d\left(\frac{-\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}{2(x-\lambda)^2}\right)$$

が成立することが直接計算することによって見出すことができる．E_λ の周期行列は

$$\begin{pmatrix} 2\displaystyle\int_1^\lambda \omega \\ 2\displaystyle\int_0^1 \omega \end{pmatrix}$$

で与えられる．($\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}$ の多価性に注意する．積分路は図 2.8 のようにとる．)

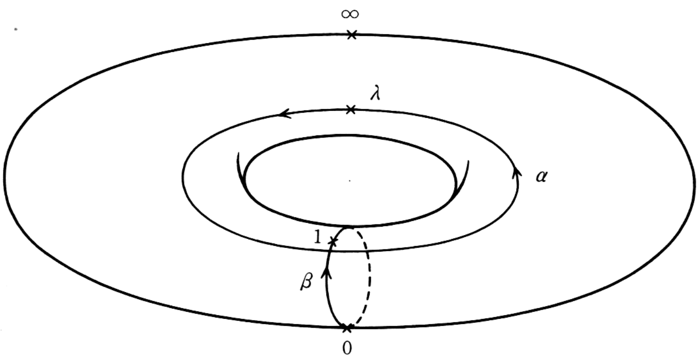


図 2.8

このとき $\pi_1(\lambda)=2\displaystyle\int_1^\lambda \omega=\int_\alpha \omega$, $\pi_2(\lambda)=2\displaystyle\int_0^1 \omega=\int_\beta \omega$ は微分方程式

$$\lambda(\lambda-1)\frac{d^2z}{d\lambda^2}+(2\lambda-1)\frac{dz}{d\lambda}+\frac{1}{4}z=0$$

の解である．この微分方程式が例 1.12 の楕円曲線の複素解析族の Picard–Fuchs 方程式である．この微分方程式は Gauss の微分方程式であり，$\lambda=0,1,\infty$ に確定特異点をもつ．$\lambda=0$ を中心とする小円板 $D=\{\lambda \mid |\lambda|<\varepsilon\}$ を考

える．$\pi_1(D\setminus\{0\})\simeq\mathbb{Z}$ であり，$\lambda=0$ のまわりを反時計回りに一周する道に沿って $\{\alpha,\beta\}$ を各ファイバーの $H_1(E_\lambda,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底に接続していく．一周してもとに戻ると $\{\alpha,\beta\}$ は $\{\alpha,\beta+2\alpha\}$ に移る．また $\pi_1(\lambda)=\int_\alpha\omega$ は上の微分方程式の $\lambda=0$ で正則な解であることが分かる．　□

《要約》

2.1　複素トーラスの同型類全体はある複素多様体の商空間として実現できるが，この商空間は Hausdorff 空間にならず，よい構造をもたない．

2.2　複素トーラスが射影多様体の構造をもつとき Abel 多様体という．複素トーラスが Abel 多様体であるための必要十分条件は Riemann の条件(P.1), (P.2)で与えられる．

2.3　Abel 多様体の偏極構造の定義．

2.4　g 次元 Δ 偏極 Abel 多様体の同型類全体は g 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ のパラモジュラー群 $Sp(\Delta,\mathbb{Z})$ による商空間 $Sp(\Delta,\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{S}_g$ として実現され，正規解析空間，さらには擬射影多様体の構造をもつ．この商空間が g 次元 Δ 偏極 Abel 多様体のモジュライ空間 $\mathcal{A}_\Delta$ である．

2.5　種数 g の Riemann 面 R に対して Jacobi 多様体 $J(R)$ と呼ばれる主偏極 Abel 多様体を対応させることができる．Jacobi 多様体 $J(R)$ は Riemann 面 R の Picard 多様体であり，また Albanese 多様体でもある．

2.6　種数 g の Riemann 面 R の Jacobi 多様体 $J(R)$ の主偏極構造はテータ因子によって定まる．また，テータ因子は種数 g の Riemann 面 R の $g-1$ 次対称積 $R^{(g-1)}$ の Jacobi 多様体 $J(R)$ への像 W^{g-1} の平行移動になっている．

2.7　種数 g の Riemann 面 R, R' が同型であるための必要十分条件は対応する Jacobi 多様体 $J(R), J(R')$ が主偏極 Abel 多様体として同型であることである．(Torelli の定理)

2.8　Abel 多様体の同型は必ずしも偏極構造を保たない．

2.9　Riemann 面の複素解析族に対して周期写像，Gauss–Manin 接続，Picard–Fuchs 方程式を対応させることができる．これらは，重さ 1 の Hodge 構造の変形と深く関係している．

3 周期写像と Hodge 理論

Hodge 理論とは，複素代数曲線の Abel 積分の理論を 2 次元以上の複素多様体に拡張する理論ともいうことができる．

Weyl の複素多様体としての Riemann 面の理論の整備，イタリア学派による代数曲面の詳細な研究，Picard, Lefschetz らの代数曲面の位相的研究，Hodge による調和積分論の構築を受けて，小平邦彦を始めとする人々が複素多様体の変形理論，複素曲面の分類理論を本格的に研究した．1960 年代後半，それらの発展をもとに Griffiths は Riemann 面の周期の理論を複素代数多様体に拡張する壮大なプログラムを開始した．

その中心をなすのが Hodge 構造による周期写像である．Hodge 構造は Hodge 分解のデータにより定義される．代数多様体の族に対しては，Hodge 構造の族(Hodge 構造の変形)および族の底空間から Hodge 構造の分類空間(周期領域)への周期写像が対応する．

この周期写像を使って Torelli 型の定理の成否を問うことができるが，大域的 Torelli 問題は難しくて K3 曲面を含む限られた種類の代数多様体に対してしか知られていない．しかし，弱い形の大域的 Torelli 問題は周期写像の無限小構造を付加した Hodge 構造の無限小変形によりかなり多くの代数多様体について成立することが Donagi らにより証明されている．

周期写像の境界での漸近挙動を知ることは Torelli 型の定理への応用にも大切である．ところが代数多様体の族の境界には退化した多様体が現れて，

そのコホモロジーは通常の Hodge 理論では扱えない．それを Hodge 理論的に扱うのが，Deligne による混合 Hodge 構造の理論である．それは，コホモロジーを通して代数多様体の周期の数論的な性質を研究する動機をもつ一方，周期の漸近挙動の記述にも基本的な道具を与える．

本章ではこれらの展開について述べる．この章の定理等の証明はしばしば参考文献を引用するにとどめたことをお断りしておく．また，Hodge 理論と代数的サイクル，周期の数論的な性質等の重要な話題には触れることができなかったので，いろいろな文献を参照していただきたい．

§3.1　Hodge 構造と周期領域

閉 Riemann 面 R に対して，その正則1次微分型式の周期を使って Jacobi 多様体を構成し，Jacobi 多様体の性質を調べて Torelli の定理を証明できることを前章で見た．その際に基本的だったのは Riemann の条件(R.1)，(R.2)であった．この Riemann の仕事を受けて Clebsch, Picard たちによって代数曲面の正則2次微分型式の周期の研究が行なわれた．決定的な仕事は1930年代の Hodge による調和積分論の構築である．Hodge は Riemann 多様体上の de Rham コホモロジーを調和型式を使って表示し，その応用として射影多様体 V のコホモロジー $H^w(V,\mathbb{C})$ が Hodge 分解

$$H^w(V,\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p=0}^{w} H^{w-p}(V,\Omega_V^p)$$

をもつこと，さらにコホモロジーの原始的部分 $H^w_{\mathrm{prim}}(V,\mathbb{C})$ に関して Riemann の条件の類似である Hodge–Riemann の双線型関係式が成り立つことを示した．

この Hodge 分解と双線型関係式を公理化して，Hodge 構造とその偏極を定義する．また，一般の偏極 Hodge 構造に対して，Siegel の上半空間 $\mathfrak{S}_g$ を一般化して Hodge–Riemann の双線型関係式を満たすフィルターのなす空間として Griffiths の周期領域(あるいは Hodge 構造の分類空間)が定義される．一般の周期領域も等質空間としての簡明な表示をもつ．

ところで，周期写像の考察等では，射影多様体の族を考える必要がある．その際，Hodge 分解(Hodge フィルター)の振舞いを調べるために，射影多様体の滑らかな族 $f\colon \mathfrak{X}\to S$ に対してファイバーのコホモロジーを束ねた高次順像 $R^w f_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ (S 上の局所定数層)だけでなく，相対的な de Rham コホモロジー $(R^w f_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}})\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_S$ ($\mathcal{O}_S$ 加群)を考える必要がある．それは Gauss–Manin 接続と呼ばれる自然な可積分接続(平坦接続ともいう) ∇ をもつ．この接続は周期の満たす微分方程式として書き直すことができて，境界(無限遠)で確定特異点をもつ Picard–Fuchs 方程式と呼ばれるものとなっている(第2章例 2.38)．この正則性(regularity)は周期写像の境界での挙動と関係している．

このような高次順像をモデルとして Hodge 構造の概念を族に拡張した Hodge 構造の変形を定義するが，その際周期写像の正則性に対応して Hodge フィルターを考えること，および Gauss–Manin 接続に関する Griffiths 横断性を仮定することが重要である．Griffiths 横断性の意味は §3.2 における周期写像の接構造の解析で明らかになる．

周期写像と周期領域に関わる一般的な性質については §3.2 で説明する．

(a)　Kähler 多様体の Hodge 分解と Hodge 構造

最初にコンパクト Kähler 多様体 M のコホモロジーに関する基本的事実を復習しよう．

定理 3.1 (Hodge 分解)　コンパクト Kähler 多様体 M のコホモロジーは Hodge 分解をもつ．

$$H^w(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=w} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p} \quad (0 \leqq w \leqq 2\dim M,\ p,q \geqq 0).$$

ここで $H^{p,q}$ は，M の (p,q) 次の調和微分型式のなす $H^w(M,\mathbb{C})$ の(複素)部分空間である．第2式は Hodge 対称性で，$\overline{}$ は $H^w(M,\mathbb{R})$ を固定する複素共役である． □

証明は，たとえば小林[53]の §6.6 参照．

この定理は，1930 年代に de Rham の微分型式によるコホモロジー理論の創始後すぐに Hodge により調和積分論として構築された．Hodge の調和積

分の研究は解析的部分に不備があり H. Weyl, A. Weil, 小平邦彦らの研究がその不備を補うとともに，2次元以上の代数多様体に対する Riemann–Roch の定理の拡張など代数多様体上の直線束のコホモロジーの研究が行なわれるようになった．

Grothendieck は合同ゼータ函数に関する Weil 予想(その中で Riemann 予想に類似する部分は Deligne によって解かれた)を証明する過程で，代数多様体の de Rham コホモロジーの研究を行なった．それを引き継いだのが Deligne による(混合)Hodge 構造の研究である．Griffiths の Hodge 構造による周期写像の研究の開始と同時期に始まっている．この観点からの Hodge の定理の吟味(と族の場合への拡張)については，下の Hodge-to-de Rham スペクトル系列(HdR)のところで述べる．

この Hodge 分解の性質を抽象すると次の定義となる．

定義 3.2　A を $\mathbb{R}$ の部分環とする．($A=\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ を念頭におかれるとよい．) 次の条件を満たす組 $H=(H_A, F)$ を重さ w の **A-Hodge 構造**という．

(H. 0)　H_A は有限生成 A 加群である．

(H. 1)　任意の p, q に対して $\overline{H^{p,q}}=H^{q,p}$ が成り立つ分解

$$H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=w} H^{p,q}$$

が存在する．ここで，$\overline{}$ は $H_{\mathbb{C}}$ の $H_{\mathbb{R}}$ に関する複素共役である．　□

条件(H. 0)で，A 加群が捻れ部分群をもたない(torsion-free)とあらかじめ仮定する流儀もある．

さて $p+q=w$ を満たす (p,q) に対して

$$F^p = \bigoplus_{r \geqq p} H^{r,s}$$

とおくと，条件(H. 1)は次の分解の存在を要請する条件と同値であることが直ちに分かる．

(H. 1′)　$F=\{F^p\}_p$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $H_{\mathbb{C}}=H_A \otimes_A \mathbb{C}$ の部分 $\mathbb{C}$ ベクトル空間による有限な減少フィルターであり，任意の p に対して

$$H_{\mathbb{C}} = F^p \oplus \overline{F^{w-p+1}}$$

が成り立つ．F^p は本来 $F^pH_{\mathbb{C}}$ と書くべきものであるが，混乱の恐れがなければ F^p と略記する．

(H.1′)から(H.1)へ戻るには

$$H^{p,q} = F^p \cap \overline{F^q}$$

とおけばよい．

もちろん，コンパクト Kähler 多様体のコホモロジー $H^w(M,\mathbb{Z})$ は重さ w の $\mathbb{Z}$-Hodge 構造である．

例 3.3

（1）（**Tate の Hodge 構造**）

$H=(2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{Z}$, $H^{-n,-n}=H_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}$ とおいて得られる重さ $-2n$ の Hodge 構造を **Tate の Hodge 構造**と呼び，$\mathbb{Z}(n)$ と記す($\mathbb{Z}(0)=\mathbb{Z}$ と記す)．$\mathbb{Z}(n)$ によるテンソル積をとる操作を **Tate ツイスト**という．Tate の A-Hodge 構造も同様に定義される．

$H^2(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})=\mathbb{Z}(-1)$ として定義することもある．

(ちなみに，$H^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ である．)

コンパクト Kähler 多様体 M に対して c_1: $\mathrm{Pic}(M)\to H^2(M,\mathbb{Z})$ の像は，$H^2(M,\mathbb{Z})$ の部分 Hodge 構造をなし，$\mathbb{Z}(1)$ の直和(**Tate 型 Hodge 構造**という)である．

（2）（**直和，テンソル積，準同型加群(内部準同型)**）

$H=(H_A,F)$, $H'=(H'_A,F)$ を A-Hodge 構造とするとき，

$$F^p(H_{\mathbb{C}}\oplus H'_{\mathbb{C}}) := F^pH_{\mathbb{C}}\oplus F^pH'_{\mathbb{C}}$$

$$F^p(H_{\mathbb{C}}\otimes H'_{\mathbb{C}}) := \bigoplus_{r+s=p} F^rH_{\mathbb{C}}\otimes F^sH'_{\mathbb{C}}$$

$$F^p\,\mathrm{Hom}(H_{\mathbb{C}},H'_{\mathbb{C}}) := \{f\in \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{C}},H'_{\mathbb{C}}) \mid f(F^rH_{\mathbb{C}})\subset F^{r+p}H'_{\mathbb{C}}\ (\forall r)\}$$

とおくと，$(H_A\oplus H'_A,F)$, $(H_A\otimes_A H'_A,F)$, $(\mathrm{Hom}_A(H_A,H'_A),F)$ の上に A-Hodge 構造が定まる．それぞれ，$H\oplus H'$, $H\otimes H'$, $\mathrm{Hom}(H,H')$ と記す．

$n>0$ のとき，次が成り立つ．

$$\mathbb{Z}(n)=\mathbb{Z}(1)^{\otimes n},\quad \mathbb{Z}(-n)=\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(n),\mathbb{Z})\ (=:\mathbb{Z}(1)^{\otimes -n}).$$

また，$H(n)=H\otimes\mathbb{Z}(n)$ と定義するとき，$F^p(H(n))=F^{p+n}H$ が成り立つ．□

例 3.4（射影空間の超曲面）　X を射影空間 $\mathbb{P}^{n+1}$ の滑らかな d 次超曲面とする．X の中間次元のコホモロジーの Hodge 構造は Jacobi 環により記述される．

X の定義方程式を $f \in S^d V$, $V = H^0(\mathbb{P}^{n+1}, \mathcal{O}(1))$ とするとき，X の Jacobi 環は $R = S^\bullet V/J$ である．ここで，J は $\mathbb{P}^{n+1}$ の斉次多項式環 $R = S^\bullet V$ の f の1次導函数で生成される斉次イデアル(Jacobian ideal)である．したがって，Jacobi 環は次数付き環 $R = \bigoplus_{k \geqq 0} R^k$ である．

すると，$H^{p,n-p} \simeq \mathrm{Gr}_F^p H^n_{\mathrm{prim}}(X, \mathbb{C})$ は，次の Jacobi 環の斉次成分に同型である．

$$\lambda_p \colon R^{t_p} \simeq \mathrm{Gr}_F^p H^n(X, \mathbb{C}), \quad t_p = (n-p+1)d - (n+2)$$

この同型は，A を次数 t_p の斉次多項式として Poincaré 留数(§3.3(a)参照)による写像

$$S^{t_p} \longrightarrow H; \quad A \longmapsto \mathrm{Res}\left(\frac{A\Omega}{f^{n-p+1}}\right)$$

により誘導される．斉次座標を $x_0, \cdots, x_{n+1}$ として，Ω は $\mathbb{P}^{n+1}$ 上の有理型微分型式 $\sum_i x_i dx_0 \cdots \overset{i}{\check{dx_i}} \cdots dx_{n+1}$ を表すものとする．

Jacobi 環による記述は，大域的 Torelli 問題に応用がある．　□

例 3.5（重さ1の Hodge 構造）　重さ1の $\mathbb{R}$-Hodge 構造とは，$\mathbb{R}$ ベクトル空間 $H_\mathbb{R}$ で分解 $H_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} = V \oplus \overline{V}$ をもつものである．これは，$\mathbb{R}$ ベクトル空間 $H_\mathbb{R}$ であって $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造をもつものと同じことである．

実際，分解 $H_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} = V \oplus \overline{V}$ があれば $\mathbb{R}$ ベクトル空間の同型

$$H_\mathbb{R} \hookrightarrow H_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \overline{V}$$

により，$H_\mathbb{R}$ に $\mathbb{C}$ ベクトル空間の構造をこの同型を通じて入れられる．

逆に，$\mathbb{R}$ ベクトル空間 $H_\mathbb{R}$ に $\mathbb{R}$ 自己同型 J であって $J^2 = -1$ を満たすものがあれば，$H_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$ での J の固有値 $\pm\sqrt{-1}$ についての固有空間分解が分解 $H_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} = V \oplus \overline{V}$ を与える．

さらに，重さ1の $\mathbb{Z}$-Hodge 構造 H（ただし $\mathbb{Z}$ 加群 $H_\mathbb{Z}$ は捻れ部分群をもたないとする）は複素トーラスと1対1に対応する．特に，重さ1の偏極

$\mathbb{Z}$-Hodge 構造は Abel 多様体と 1 対 1 に対応する.

これは，$H_{\mathbb{Z}}$ が $\mathbb{R}$ 上の同型 $H_{\mathbb{R}} \to \overline{V}$ を通じて，$H_{\mathbb{R}}$ の(極大階数の)格子を与えるから

$$J(H) := H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$$

が対応する複素トーラスである．また，複素トーラス $J(H)$ からはその普遍被覆として $H_{\mathbb{R}}$ が，基本群として $H_{\mathbb{Z}}$ が回復される.

コンパクト Kähler 多様体 M のコホモロジー $H^1(M,\mathbb{Z})$ および $H^{2\dim M-1}(M,\mathbb{Z})$ に対する $J(H^w(M,\mathbb{Z}))$ は Picard 多様体 $\mathrm{Pic}^0(M)$ および Albanese 多様体 $\mathrm{Alb}(M)$ に他ならない.

より一般に $H^{2p-1}(M,\mathbb{Z})$ を分解 $H^{2p-1}(M,\mathbb{C}) = F^p \oplus \overline{F^p}$ により重さ 1 の Hodge 構造とみたときの複素トーラス $J(H^{2p-1}(M,\mathbb{Z}))$ を Griffiths の **p 次中間 Jacobi 多様体**(intermediate Jacobian variety)と呼ぶ．閉 Riemann 面の Abel–Jacobi 写像を一般化した(p 次の)**Abel–Jacobi 写像**が構成できる. □

次に，Hodge フィルターの役割を次の **Hodge-to-de Rham スペクトル系列**の言葉で表してみよう.

(HdR) $E_1^{p,q} = H^{p+q}(M, \mathrm{Gr}_F^p \Omega_M^\bullet) \simeq H^q(M, \Omega_M^p) \implies H^{p+q}(M,\mathbb{C})$

スペクトル系列に関しては，ホモロジー代数の教科書を参照されたい．たとえば Weibel [98]または谷崎[89]の第 2 章に記述がある．ここでは(加群または Abel 圏の対象からなる)フィルター付き複体 $(K^\bullet, F)$ に対して，$H^n(K^\bullet)$ 上のフィルター

$$F^p H^n(K^\bullet) := \mathrm{Im}(H^n(F^p K^\bullet) \to H^n(K^\bullet))$$

の逐次商(graded piece) $\mathrm{Gr}_F^p H^n(K^\bullet) := F^p/F^{p+1}$ を計算する仕組みとして，スペクトル系列があること，各 $r\,(\geqq 1)$ に対して，複体 $(E_r^{p,q}, d_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1})$ があり，コホモロジーをとるたびに次の $E_{r+1}^{p,q}$ が得られること，特に E_1 項は $H^{p+q}(\mathrm{Gr}_F^p K^\bullet)$ で与えられること，を知っていれば一応十分である．このことを

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(\mathrm{Gr}_F^p K^\bullet) \Longrightarrow H^{p+q}(K^\bullet)$$

と表現する.

加群の層のフィルター付き複体の超コホモロジー(hypercohomology)の場

合も同様である.

いま，正則な微分型式の(芽の)なす層の de Rham 複体の場合にスペクトル系列を適用する. Ω_M^p で p 次正則微分型式の(芽の)なす層を表し，$\Omega_M^\bullet$ で(正則)外微分作用素 d' により(Abel 群の層の)複体としたものを表す. 複体 $\Omega_M^\bullet$ のフィルター $F^\bullet$ を次の部分複体として定める:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} F^p\Omega_M^\bullet = \Omega_M^{\bullet \geqq p}: & 0 & \to & 0 & \to \cdots \to & 0 & \to & \Omega_M^p & \xrightarrow{d'} & \Omega_M^{p+1} & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow id & \\ \Omega_M^\bullet: & \mathcal{O}_M & \xrightarrow{d'} & \Omega_M^1 & \xrightarrow{d'} \cdots \xrightarrow{d'} & \Omega_M^{p-1} & \xrightarrow{d'} & \Omega_M^p & \xrightarrow{d'} & \Omega_M^{p+1} & \to \cdots \end{array}$$

$F^p\Omega_M^\bullet$ は減少フィルターであり，p 次の逐次商部分は

$$F^p\Omega_M^\bullet \supset F^{p+1}\Omega_M^\bullet, \quad \mathrm{Gr}_F^p\,\Omega_M^\bullet = F^p\Omega_M^\bullet/F^{p+1}\Omega_M^\bullet \simeq \Omega_M^p[-p]$$

で与えられる. ここで複体 $K^\bullet$ の次数の付け替え $K^\bullet[n]$ は $(K^\bullet[n])^p = K^{p+n}$ で定義され，$\Omega_M^p[-p]$ は層 Ω_M^p が p 次に位置し他の次数では 0 の複体を示す.

正則微分型式に関する Poincaré の補題により $\Omega_M^\bullet$ は定数層 $\mathbb{C}_M$ の分解(resolution)となっているから，フィルター付き複体 $(\Omega_M^\bullet, F^\bullet)$ のスペクトル系列は上の(HdR)で与えられる. Hodge 分解の存在の結果，次の基本的結果が成り立つ.

定理 3.6　Hodge-to-de Rham スペクトル系列は E_1 項で退化する.

[証明]　Dolbeault の補題により $\Omega_M^\bullet$ は 2 重複体 $A_M^{\bullet,\bullet}$ に付随する単純(simple な)複体 $s(A_M^{\bullet,\bullet})$ に**準同値**(quasi-isomorphic)である. ここで，$A_M^{p,q}$ は p,q 次の C^∞ 微分型式の(芽の)なす層を表し，外微分 d', d'' でもって 2 重複体と考えたものを $A_M^{\bullet,\bullet}$ と記した.

さて $A_M^{\bullet,\bullet}$ のフィルター $F^\bullet$ を $\Omega_M^\bullet$ のときと同様に

$$F^pA_M^{r,s} = \begin{cases} A_M^{r,s}, & r \geqq p \\ 0, & r < p \end{cases}$$

と定める. すると包含写像 $\Omega_M^\bullet \subset s(A_M^{\bullet,\bullet})$ はフィルターを保つ. $s(A_M^{\bullet,\bullet})$ は細層(fine sheaf)の複体ゆえ，

$$H^w(M, s(A_M^{\bullet,\bullet})) \simeq H^w(s(\Gamma(M, A_M^{\bullet,\bullet})))$$

を得る．しかし，$\Gamma(M, A_M^{\bullet,\bullet})$ は調和微分型式の空間 $H^{p,q}$ のなす 2 重複体 $H^{\bullet,\bullet}$ を含み，包含写像 $H^{\bullet,\bullet} \hookrightarrow \Gamma(M, A_M^{\bullet,\bullet})$ は準同値である．また $H^{\bullet,\bullet}$ 上の同様のフィルター $F^\bullet$ を保つことは明らかである．

調和微分型式の定義から $H^{\bullet,\bullet}$ 上 $d'=0$, $d''=0$ である．したがって，フィルター付き複体 $(H^{\bullet,\bullet}, F^\bullet)$ のスペクトル系列は E_1 項で退化する．上記の準同値からこのスペクトル系列は Hodge-to-de Rham スペクトル系列と同型であるので定理は証明された． ∎

この証明から

$$\mathrm{Gr}_F^p H^{p+q}(M, \mathbb{C}) \simeq H^q(M, \Omega_M^p) \simeq H^{p,q}$$

であることも分かる．Hodge-to-de Rham スペクトル系列から決まる $H^w(M, \mathbb{C})$ 上のフィルター F を **Hodge フィルター**(Hodge filtration)と呼ぶ．

Hodge-to-de Rham スペクトル系列が，したがって Hodge 分解が Kähler 計量の選び方によらず，M の複素構造のみによることは明らかであろう．

ところで，1 次元と 2 次元の場合に Hodge-to-de Rham スペクトル系列の退化は調和積分論を使わなくても分かる．

例 3.7　まず 1 次元の場合だが，1 次元のコンパクト複素多様体 M は必ず Kähler 計量をもつことは容易に分かる．一方，Hodge-to-de Rham スペクトル系列の自明でないかもしれない E_1 項の微分 d_1 は

$$E_1^{p,q} \simeq H^q(\Omega^p) \qquad \begin{array}{c} H^1(\Omega^0) \longrightarrow H^1(\Omega^1) \\ H^0(\Omega^0) \longrightarrow H^0(\Omega^1) \end{array}$$

であり，どちらも正則外微分 $d' \colon \Omega^0 \to \Omega^1$ から誘導されたものである．ところで，自然な包含写像 $\mathbb{C} \hookrightarrow \Omega^0 = \mathcal{O}$ は同型 $H^0(\mathbb{C}) \simeq H^0(\mathcal{O})$ を誘導するが，この同型と d' の合成を考えると $\mathbb{C}$ が d' の核(kernel)なので $d_1 = 0 \colon H^0(\mathbb{C}) \simeq H^0(\Omega^0) \to H^0(\Omega^1)$ である．

もう一方の d_1 は最初の d_1 の双対(dual)である．実際，非退化な双線型型式(pairing)

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Omega^i)\times H^1(\Omega^{1-i}) & \longrightarrow & H^1(\Omega^1)\simeq\mathbb{C} \\ (\xi,\eta) & \longmapsto & \int_M \xi\wedge\eta \end{array}$$

に関して，Stokes の定理により $\int_M f d'\eta = -\int_M d'f\wedge\eta$ が成り立つ（$f\in H^0(\mathcal{O})$, $\eta\in H^1(\mathcal{O})$）．したがって，もう一方の d_1 も 0 である．

1 次元のときは自明でない E_2 項の微分 d_2 は存在しない．

2 次元では Kähler 計量をもたない曲面が存在する．（例 1.14 を参照のこと．そのような曲面の第 1 Betti 数 b_1 は奇数である．）しかしながら，任意のコンパクト複素曲面 M の Hodge-to-de Rham スペクトル系列は E_1 項で退化する．また b_1 が偶数のとき，1 次コホモロジー H^1 で Hodge 対称性も成り立つ．これについては Barth–Peters–Van de Ven [7] を参照されたい．

Kähler でない 3 次元コンパクト複素多様体で，d' 閉（d'-closed）でない正則 1 次微分型式をもつものが存在することを注意しておこう．　□

さらに，コンパクト Kähler 多様体のコホモロジーに関する重要な性質の復習を続けよう．M の Kähler 構造を決める Kähler 型式を ω とする．また M の複素次元を $n=\dim M$ としよう．

Lefschetz 分解，あるいは原始的分解と呼ばれるコホモロジーの分解がある．この分解は Hodge 分解と両立するので，しばしばコホモロジーの原始的部分の Hodge 構造のみに注目すればよいことがある．

まず **Lefschetz 作用素** L を定義しよう．Kähler 型式 ω は閉型式で $(1,1)$ 型なので $\omega\wedge\colon A^{\bullet,\bullet}\to A^{\bullet+1,\bullet+1}$ はコホモロジーにおける準同型

$$L := [\omega]\wedge\colon H^{\bullet}(M,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{\bullet+2}(M,\mathbb{C})$$

を誘導する．

このとき L のべきに関しては次の基本的事実が成り立つ．

定理 3.8（**強 Lefschetz 定理**（hard Lefschetz theorem））　$k\leqq n$ のとき

$$L^{n-k}\colon\ H^k(M,\mathbb{C}) \longrightarrow H^{2n-k}(M,\mathbb{C})$$

は同型である．　□

証明は小林[53]の定理 6.3(ii)の証明中に示されている．

この定理はもともと Lefschetz の著書[62]で “証明” されていたが，$\mathbb{Z}$ 係数

では反例があることが知られている．$\mathbb{C}$ 係数では(したがって $\mathbb{Q}$ 係数でも) Hodge 理論の結果として証明されている．非特異完備代数多様体については，正標数に帰着させる方法による純代数的な証明が 1973 年 Deligne [21] により与えられている．

定義 3.9　$1 \leqq k \leqq n = \dim M$ のとき

$$H^k_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{C}) = \mathrm{Ker}(L^{n-k+1}\colon H^k(M,\mathbb{C}) \to H^{2n-k+2}(M,\mathbb{C}))$$
$$H^0_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{C}) = H^0(M,\mathbb{C})$$

とおき，$H^w(M,\mathbb{C})$ の**原始的部分**(primitive part)という． □

$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えて同様の定義ができる．M が射影代数多様体で，ω が超平面切断に対応する整係数コホモロジー類を代表するときには，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{Z}$ に置き換えて同様の定義ができる．

$n \geqq k \geqq 2$ として，$L^{n-k+2}\colon H^{k-2}(M,\mathbb{C}) \to H^{2n-k+2}(M,\mathbb{C})$ が同型なので，$L^{n-k+1}\colon H^k(M,\mathbb{C}) \to H^{2n-k+2}(M,\mathbb{C})$ は全射であり，$LH^{k-2}(M,\mathbb{C})$ は $H^k(M,\mathbb{C})$ の直和因子で

$$H^k(M,\mathbb{C}) = H^k_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{C}) \oplus LH^{k-2}(M,\mathbb{C})$$

が成り立つ．これを繰り返して次の原始的分解の存在が示せる．もちろん $k>n$ の場合は $k \leqq n$ に帰着する．

定理 3.10 (原始的分解)　射影多様体 M に対して原始的分解

$$H^k(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{j \geqq \max\{k-n,0\}} L^j H^{k-2j}_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{C})$$

が成立する． □

原始的分解は C^∞ 級の微分型式のレベルで存在する．それを使って強 Lefschetz 定理を証明することもできる．小林[53]の第 6 章参照．

また大切な注意として，L は Hodge 分解の型を保つ．たとえば，微分型式のレベルで $[\Delta_d, L] = [\Delta_{d'}, L] = 0$ である．したがって，

$$H^k_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{C}) \cap H^{p,q}(M) = \bigoplus_{j \geqq \max\{k-n,0\}} L^j(H^{k-2j}_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{C}) \cap H^{p-j,q-j}(M))$$

が成り立つ．この式の左辺を $H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(M)$ と記すことにする．

注意 3.11　原始的分解には単純 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現としての分解という意味がある．それを説明するために，

$$H\eta = (n-k)\eta, \quad \eta \in H^k(M,\mathbb{C})$$

とおく．L はコホモロジー全体 $H^*(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{k=0}^{2n} H^k(M,\mathbb{C})$ 上のべき零な自己準同型である．すると

$$\rho\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = L, \quad \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H$$

を満たす表現 $\rho\colon \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(H^*(M,\mathbb{C}))$ が一意に存在する．各 $\eta \in H^k_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{C})$ に対し，$\{\eta, L\eta, L^2\eta, \cdots\}$ が $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の表現を与えて，η がその**最高ウェイトベクトル**(巡回的な生成元)である．

Hodge 構造の退化の記述において類似の事実がある(§3.3(b)の N フィルター)．

次に Hodge 構造の間の射(morphism)を定義しておこう．

定義 3.12　$H = (H_A, F)$，$H' = (H'_A, F)$ を A-Hodge 構造とする．$f_A\colon H_A \to H'_A$ が A 加群の射であり，$f_{\mathbb{C}} = f_A \otimes_A \mathbb{C}\colon H_{\mathbb{C}} \to H'_{\mathbb{C}}$ がフィルター F と(したがって $\overline{F}$ とも)両立する，すなわち，

$$f_{\mathbb{C}}(F^p H_{\mathbb{C}}) \subset F^p H'_{\mathbb{C}}, \quad f_{\mathbb{C}}(\overline{F^p} H_{\mathbb{C}}) \subset \overline{F^p} H'_{\mathbb{C}}$$

が成り立つとき $f = (f_A, f_{\mathbb{C}})\colon H \to H'$ を H から H' への **A-Hodge 構造の射**であるという．

より一般に

$$f_{\mathbb{C}}(F^p H_{\mathbb{C}}) \subset F^{p+r} H'_{\mathbb{C}}, \quad f_{\mathbb{C}}(\overline{F^p} H_{\mathbb{C}}) \subset \overline{F^{p+r}} H'_{\mathbb{C}}$$

を満たすものを (r,r) 型の射という．これは Hodge 構造の射 $H \to H'(r)$ のことといってもよい．

$F^0\,\mathrm{Hom}(H,H') \cap \overline{F^0}\,\mathrm{Hom}(H,H')$ の元が Hodge 構造の射であることに注意しよう．　□

A-Hodge 構造のなす加法圏を (A-HS) で表そう．

$$f_{\mathbb{C}}(F^p H_{\mathbb{C}}) = F^p H'_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{Im}\, f_{\mathbb{C}}$$

が成り立つことに注意しよう．この事実を，$f_{\mathbb{C}}$ が Hodge フィルターと**強い意味で両立する**(strictly compatible)という．

すると，任意の射に対して核，余核をこの加法圏 (A-HS) 内で定義することができることが容易に分かり，圏 (A-HS) は Abel 圏[*1]をなすことが分かる.

例 3.13　$f\colon M \to N$ をコンパクト Kähler 多様体の間の正則写像とする. このとき，f の誘導する準同型

$$f^*\colon H^w(N,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^w(M,\mathbb{Z})$$

は $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の射である. 実際，$\mathbb{C}$ 係数では微分型式の引き戻しは微分型式の型を保つことは明らかである. □

例 3.14　コンパクト Kähler 多様体 M の Kähler 型式 ω が定める Lefschetz 作用素 $L\colon H^w(M,\mathbb{R}) \to H^{w+2}(M,\mathbb{R})$ は $(1,1)$ 型の $\mathbb{R}$-Hodge 構造の射であり，コホモロジーの原始的部分 $H^w_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(L^{n-w+1})$ は $\mathbb{R}$-Hodge 構造をもつ.（ただし，$w \leqq n$ と仮定する.）$[\omega] \in H^2(M,\mathbb{Z})$ である場合(すなわち射影多様体の場合)は，さらに $\mathbb{Z}$-Hodge 構造をもつ. □

次に，分類空間，Torelli 問題等の考察に欠かせない Hodge 構造の偏極を導入しよう.

定義 3.15　A-Hodge 構造の射

$$\Psi\colon H_A \otimes H_A \longrightarrow A(-w)$$

が与えられ $(2\pi\sqrt{-1})^w\Psi(Cx,y)$ が $H_{\mathbb{R}}$ 上対称正定値であるとき，射 Ψ を重さ w の A-Hodge 構造 $H=(H_A,F)$ の**偏極**(polarization)という.

ここで C は $0 \neq v \in H^{p,q}$ に対して $Cv = (\sqrt{-1})^{p-q}v$ で決まる $H_{\mathbb{C}}$ 上の線型作用素(**Weil 作用素**と呼ばれる)である. □

まず，C が実作用素であることに注意しよう. すなわち，複素共役 $v \mapsto \overline{v}$ に関して $\overline{Cv} = C\overline{v}$ が成り立つ.

次に偏極 Ψ を少し書き換えよう.

$$Q(u,v) = (2\pi\sqrt{-1})^w\Psi(u,v) \tag{3.1}$$

とおくことにより次の条件を満たす A 双線型型式

$$Q\colon H_A \otimes H_A \longrightarrow A$$

---

*1　Abel 圏とは，加法圏 $\mathcal{C}$ で，直和が存在し，すべての射 f の核，余核が存在して，かつ $\mathcal{C}$ において $\mathrm{Coim}(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$ が成り立つ圏のことをいう.

が得られる.（$H_{\mathbb{C}}$ に自然に拡張した双線型型式も同じ記号 Q で表す.）

（0）　Q は w が偶数のとき対称双線型型式，w が奇数のとき交代双線型型式である.

（1）　$Q(F^p, F^{w-p+1})=0 \quad (\forall p)$.

（2）　0 でない任意の $v\in H^{p,q}$ に対して $(\sqrt{-1})^{p-q}Q(v,\bar{v})>0$.

逆にこれらの性質を満たすものが偏極を与える．このことを確認しておこう.

Weil 作用素は $H^{p,q}$ 上で $C^2=(-1)^{p+q}$ を満たすことに注意しよう．したがって，

$$Q(u,v)=Q(Cu,Cv)=Q(C(Cv),u)=(-1)^w Q(v,u)$$

であるから，重さ w が偶数のとき Q は対称であり，w が奇数のとき Q が交代であることと，Ψ の対称性が対応する.

$A(-w)_{\mathbb{C}}$ は (w,w) 成分のみもつので，Ψ が Hodge 構造の射であることは

（1′）　$p+r=w$（したがって $q+s=w$）でなければ，$\Psi(H^{p,q},H^{r,s})=0$ である.

を意味する．これは明らかに次と同値である.

（1″）　$p+r=w$（したがって $q+s=w$）でなければ，$Q(H^{p,q},H^{r,s})=0$ である.

(1″)が(2)を導くことは自明である．逆に(2)を仮定すると，

（2′）　$r\geqq w-p+1$ のとき $\Psi(H^{p,w-p},H^{r,w-r})=0$ である.

がいえる．これは(1″)の半分に相当する．Ψ が $\mathbb{R}$ 上定義されていることから残り半分もいえる.

例 3.16（コンパクト Kähler 多様体 M のコホモロジー）　コホモロジーの原始的部分 $H^w_{\mathrm{prim}}(M,\mathbb{R})$ 上の偏極を次のようにして定義することができる.

$$Q(u,v)=(-1)^{w(w-1)/2}\int_M \omega^{d-w}\wedge u\wedge v$$

とおく．ここで ω は M の Kähler 型式である．M が射影代数多様体 X の場合，ω を X の豊富な(ample)直線束の第1 Chern 類(Chern 型式)とすると $H^w(M,\mathbb{Z})$ 上の偏極が定まる.

Hodge–Riemann の双線型関係式により Q は偏極の条件を満たす．

ここで **Hodge–Riemann の双線型関係式**（Hodge-Riemann bilinear relations）とは，次の二つの性質である．

（HR.1）　$u\in H^{p,q}(M)$, $v\in H^{r,s}(M)$ に対して $(p,q)\neq(s,r)$ なら，$Q(u,v)=0$ である．

（HR.2）　0 でない任意の $v\in H^{p,q}_{\mathrm{prim}}(M)$ に対して $(\sqrt{-1})^{p-q}Q(v,\overline{v})>0$ が成り立つ．

もちろん $p+q=r+s=w$ としている．そして，(HR.1)は微分型式の型を考えれば明らか．(HR.2)は次の Hermite 幾何の性質から直ちに従う．$v\in A^{p,q}(M)$ を原始的，すなわち $L^{n-k+1}v=0$ とするとき，

$$*v=(-1)^{w(w-1)/2}(\sqrt{-1})^{p-q}\frac{1}{(d-w)!}L^{d-w}\overline{v}$$

（小林[53]の式(6.94)参照．）これより $0\neq v\in H^{p,q}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1})^{p-q}Q(v,\overline{v}) &= (-1)^{w(w-1)/2}(\sqrt{-1})^{p-q}\int_M\omega^{d-w}\wedge v\wedge\overline{v}\\ &= (d-w)!\int_M v\wedge *v>0\end{aligned}$$

となる．

Q を偏極と呼ぶのは，コンパクト Riemann 面の $H^1(C,\mathbb{R})$ 上の交叉型式が Jacobi 多様体の偏極を与える事情に由来する．w が奇数のとき一般には，中間 Jacobi 多様体の不定符号の偏極を与え，Abel 多様体の構造は入らない．

$w=n=\dim M$ が偶数のとき，Hodge–Riemann の双線型関係式の応用として **Hodge 符号定理**が証明される．すなわち，$H^n(M,\mathbb{R})$ 上の交叉型式 $Q(u,v)=\int_M u\wedge v$ の符号(index)は $i(M)=\sum_{p+q=n}(-1)^p h^{p,q}(M)$ で与えられることが分かる．　□

(b) Hodge 構造の変形

Hodge 構造を族(family)にした概念が Hodge 構造の変形(variation)である．その定義と基本的な性質を述べる．Griffiths は代数多様体のモジュライ

の研究，特に Torelli 問題を調べるためにこれを導入した．それゆえ Hodge 構造の変形は次の周期写像の話と自然に結びついている．特に重要な漸近挙動については後(§3.3)で述べることになる．

コンパクト Kähler 多様体の滑らかな族が与えられたとしよう．すなわち複素多様体の間の滑らかな固有正則写像 $f\colon M\to S$ および各ファイバー $M_s=f^{-1}(s)$ $(s\in S)$ に制限すると M_s 上の Kähler 計量を与える M 上の 2 次微分型式 ω があると仮定する．このような正則写像を **Kähler 射**(Kähler morphism)という．もちろん M 上の Kähler 型式 ω があればこの仮定は満たされる．このとき，各ファイバーのコホモロジーは族の底空間 S のパラメータに正則に依存する Hodge フィルターをもつ．この辺の事情を少し説明しよう．

正則写像 $f\colon M\to S$ は C^∞ 級のファイバー空間(fibration)なので，各ファイバー M_s のコホモロジー $H^w(M_s,\mathbb{C})$ は $s\in S$ が動くとき S 上の局所定数層，すなわち局所系(local system)をなす．これは M 上の定数層 $\mathbb{C}_M$ の w 次高次順像 $R^wf_*\mathbb{C}_M$ に他ならない．すなわち，各開集合 $U\subset S$ に対して $H^w(f^{-1}(U),\mathbb{C})$ を対応させてできる前層の層化が $R^wf_*\mathbb{C}_M$ である．(層の高次順像については，Hartshorne [42]の第3章，上野[94]の第6章を参照のこと.)

$R^wf_*\mathbb{C}_M$ が S 上の局所定数層をなすことは言い換えると，ベクトル束 $R^wf_*\mathbb{C}_M\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_S$ 上の**可積分接続**(integrable connection)(**平坦接続**(flat connection)ということも多い)の**平坦な切断**(flat section)の全体として $R^wf_*\mathbb{C}_M$ が得られるということである．

一般に，S 上の正則ベクトル束 $\mathcal{V}$ 上の(正則な)可積分接続

$$\nabla\colon\ \mathcal{V}\longrightarrow\Omega^1_S\otimes\mathcal{V}$$

に対して，Ker(∇) は S 上の局所定数層 V をなし，その断面は ∇ に関して平行であるといわれる．逆に局所定数層 V に対して，ベクトル束 $\mathcal{V}=\mathcal{O}_S\otimes_{\mathbb{C}}V$ 上には自然な接続

$$\nabla=d'\otimes id:\mathcal{O}_S\otimes_{\mathbb{C}}V\longrightarrow\Omega^1_S\otimes_{\mathbb{C}}V \tag{3.2}$$

が備わっている．ここで，$d'\colon\mathcal{O}_S\to\Omega^1_S$ は正則な外微分である．

注意 3.17 実は，滑らかな代数多様体上の局所定数層は，代数的なベクトル束とその上の可積分接続との組で無限遠での正則性の条件を満たすものと 1 対 1 に対応することが知られている．これは，可積分接続の標準延長の理論を用いて Deligne により証明された．この Riemann–Hilbert 対応は，より一般の構成可能(constructible)層と正則なホロノミー系との対応に拡張されている．

さて de Rham 複体も相対化しておく必要がある．ファイバー方向の微分型式の定義は，通常と同じく 1 次微分型式から出発する．微分型式の引き戻しは自然な包含射

$$f^{-1}\Omega_S^1 \hookrightarrow \Omega_M^1$$

を定義する．これから導かれる $\mathcal{O}_M$ 準同型 $f^*\Omega_S^1 \hookrightarrow \Omega_M^1$ が定める完全列

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_M^1 \longrightarrow \Omega_{M/S}^1 \longrightarrow 0$$

により $\Omega_{M/S}^1$ を定義する．すると直ちに

$$\Omega_{M/S}^p := \bigwedge^p \Omega_{M/S}^1$$

も定義される．相対的な微分型式の外微分 $d'_{M/S}$ は

$$d'_{M/S}\colon \Omega_M^0 \xrightarrow{d'_M} \Omega_M^1 \longrightarrow \Omega_{M/S}^1$$

により定義され，高次の微分型式にも Leibniz 則で拡張される．

上の $V = R^w f_*\mathbb{C}_M$ の場合には，ベクトル束 $\mathcal{V}$ は次で与えられる．

命題 3.18

$$\mathcal{V} = \mathcal{O}_S \otimes R^w f_*\mathbb{C}_M \simeq R^w f_*(\Omega_{M/S}^\bullet)$$

である．ここで右辺は複体 $\Omega_{M/S}^\bullet$ の超高次順像(hyperderived functor)を表す．

［証明］ 写像 f が滑らかなときには，通常の正則な Poincaré の補題の相対的な類似として次の**準同値**(quasi-isomorphism)

$$f^{-1}\mathcal{O}_S \longrightarrow \Omega_{M/S}^\bullet$$

が得られる．あとは射影公式(projection formula)により

$$\mathcal{O}_S \otimes R^w f_*\mathbb{C}_M \simeq R^w f_*(f^{-1}\mathcal{O}_S \otimes_{f^{-1}\mathbb{C}_S} \mathbb{C}_M)$$

に注意すればよい． ∎

正則ベクトル束 $R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S})$ は相対的な de Rham コホモロジーである．このベクトル束上の可積分接続で，局所定数層 $R^w f_*\mathbb{C}_M$ を平坦な切断全体とするものが **Gauss–Manin 接続**(Gauss-Manin connection)と呼ばれるものである．

N. Katz と小田忠雄は Čech 被覆を使った構成法を与えた．ここではより代数的な(N. Katz と Deligne による)記述をしよう．

まず f に関するフィルターを導入する．

$$L^i\Omega^\bullet_M := f^*\Omega^i_S \wedge \Omega^{\bullet-i}_M$$

すると直ちに次を得る．

$$\mathrm{Gr}^i_L\,\Omega^\bullet_M \simeq f^*\Omega^i_S \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega^\bullet_{M/S}[-i]$$

次の短完全列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}^1_L = L^1/L^2 \longrightarrow L^0/L^2 \longrightarrow L^0/L^1 = \mathrm{Gr}^0_L \longrightarrow 0$$

から得られる超コホモロジーの長完全列の最初の余境界写像(coboundary map)

$$R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S}) \longrightarrow \Omega^1_S \otimes R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S}) \tag{3.3}$$

を考えよう．これが $\mathcal{O}_S \otimes R^w f_*\mathbb{C}_M \simeq R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S})$ の接続を与えることは直接確かめられる．

$R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S})$ の Hodge フィルターは通常のときと同様に相対的 de Rham 複体上のフィルター

$$F^p\Omega^\bullet_{M/S} := \Omega^{\bullet \geqq p}_{M/S}$$

で定まる：

$$F^pR^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S}) = \mathrm{Im}(R^w f_*(F^p\Omega^\bullet_{M/S}) \to R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S})).$$

相対的な場合にも，Hodge-to-de Rham スペクトル系列は E_1 項で退化することが分かり，

$$F^pR^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S}) \simeq R^w f_*(F^p\Omega^\bullet_{M/S})$$

である．

この高次順像の場合を公理化して次の定義にいたる．

定義 3.19　A を $\mathbb{R}$ の部分環とする．以下の条件を満足する組 $H=(H_A, F)$ を複素多様体 S 上の重さ w の **A-Hodge 構造の変形**(variation of A-Hodge

structure)という.

（0）　H_A は S 上の有限生成 A 加群の局所定数層(すなわち，局所系)である.

（1）　$F=\{F^p\}_p$ は $\mathcal{O}_S$ 加群 $H_{\mathcal{O}}=H_A\otimes_A\mathcal{O}_S$ の部分 $\mathcal{O}_S$ 加群による有限な減少フィルターであり，各点 $s\in S$ におけるファイバー $(H_A(s), F(s))$ は重さ w の A-Hodge 構造である.

ここで，$H_A(s)=H_{A,s}$ は局所定数層 H_A の点 $s\in S$ における茎(stalk)であり，$F(s)=\{F^p(s)\}_p$ は $\mathcal{O}_S$ 加群 $H_{\mathcal{O}}$ のファイバーによるフィルターである[*2]. また F^p は本来 $F^pH_{\mathcal{O}}$ と書くべきものであるが，混乱の恐れがなければ F^p と略記する.

さらにもう一つ，大切な条件がある.

（2）（**Griffiths 横断性**(Griffiths transversality)）　$H_{\mathcal{O}}$ の自然な接続 ∇ (3.2)は次を満たす.

$$\nabla F^p\subset\Omega^1_S\otimes F^{p-1}\quad(\forall p)$$

接続 ∇ は(曲率型式が 0 という意味で)可積分接続であることに注意する.

Hodge 構造の変形をその英語での頭文字をとってしばしば VHS ということがある. □

高次順像の場合の Griffiths 横断性をみておこう.

定理 3.20（高次順像の Griffiths 横断性）　Kähler 射 $f\colon M\to S$ に対し，$R^wf_*(\Omega^\bullet_{M/S})$ 上の Gauss–Manin 接続 ∇ は次を満たす.

$$\nabla F^pR^wf_*(\Omega^\bullet_{M/S})\subset\Omega^1_S\otimes F^{p-1}R^wf_*(\Omega^\bullet_{M/S})\quad(\forall p)$$

［証明］　我々の Gauss–Manin 接続の定義は短完全列

$$(*)\qquad 0\longrightarrow \mathrm{Gr}^1_L=L^1/L^2\longrightarrow L^0/L^2\longrightarrow L^0/L^1=\mathrm{Gr}^0_L\longrightarrow 0$$

から得られる超コホモロジーの長完全列の余境界であった. L は f に関するフィルター $L^i\Omega^\bullet_M:=f^*\Omega^i_S\wedge\Omega^{\bullet-i}_M$ である. 一方，フィルター $F^p\Omega^\bullet_M:=\Omega^{\bullet\geqq p}_M$ を考え，これが上の短完全列に誘導するフィルターをみてみると

---

*2　$\mathcal{O}_S$ 加群 E のファイバー $E(s)$ は $E(s):=E_s/\mathfrak{m}_sE_s$ により定義され，自然に $\mathcal{O}_S(s)=\mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{S,s}\simeq\mathbb{C}$ 上の加群，すなわち $\mathbb{C}$ ベクトル空間である. ここで $\mathfrak{m}_s$ は $\mathcal{O}_{S,s}$ の極大イデアルである.

$$0 \longrightarrow \Omega^1_S \otimes F^{p-1}\Omega^\bullet_{M/S} \longrightarrow (L^0/L^2)^{\bullet \geqq p} \longrightarrow F^p\Omega^\bullet_{M/S} \longrightarrow 0$$

となる，すなわち (Gr^i_L) $(i=0,1)$ 上で Hodge フィルター F に一致する．次の自然な可換図式

$$\begin{array}{ccc} R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S}) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1_S \otimes R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ R^w f_*(F^p\Omega^\bullet_{M/S}) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1_S \otimes R^w f_*(F^{p-1}\Omega^\bullet_{M/S}) \end{array}$$

より，縦の射の像が Hodge フィルター F であることを考慮して定理のいう包含関係を得る． ∎

この定理より Gauss–Manin 接続 ∇ の $R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S})$ の Hodge フィルターに関する逐次商(graded quotient) $\overline{\nabla} = \mathrm{Gr}^p_F(\nabla)$ をとることができる．すると，次がいえる．

命題 3.21　逐次商 $\overline{\nabla} = \mathrm{Gr}^p_F(\nabla)$ は族 $f\colon M \to S$ の小平–Spencer 類 $\rho_{M/S} \in \mathrm{Hom}(T_S, R^1 f_*(T_{M/S}))$ で与えられる．

［証明］　第1章で定義した小平–Spencer 類 $\rho_{M/S} \in \mathrm{Hom}(T_S,\ R^1 f_*(T_{M/S})) \simeq H^0(S, \Omega^1_S \otimes R^1 f_*(T_{M/S}))$ のコホモロジー論的な定義は次の通りである．$\mathcal{O}_M$ 加群の拡大

$$0 \longrightarrow f^*(\Omega^1_S) \longrightarrow \Omega^1_M \longrightarrow \Omega^1_{M/S} \longrightarrow 0$$

の定める類 $\in \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{M/S}, f^*(\Omega^1_S)) \simeq H^1(M, \underline{Hom}(\Omega^1_{M/S}, f^*(\Omega^1_S)))$ を考える．f の Leray のスペクトル系列の端準同型(edge homomorphism)

$$H^1(M, T_{M/S} \otimes f^*(\Omega^1_S)) \longrightarrow$$
$$H^0(S, R^1 f_*(T_{M/S} \otimes f^*(\Omega^1_S))) \simeq H^0(S, \Omega^1_S \otimes R^1 f_*(T_{M/S}))$$

による像が $\rho_{M/S}$ である．

短完全列$(*)$が上の拡大に $\Omega^\bullet_M$ をテンソルしたものゆえ，あとは次のホモロジー代数の事実に注意すればよい． ∎

補題 3.22　$c \in H^1(S, \underline{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{F}))$ が $\mathcal{O}_S$ 加群の層の拡大

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

に対応する類とすると，境界準同型 $H^k(S, \mathcal{F}) \xrightarrow{\partial} H^{k+1}(S, \mathcal{H})$ は c とのカッ

プ積で与えられる. □

ところで例 2.38 に顕著に現れているように, 一般に Gauss–Manin 接続は確定特異点をもつ常微分方程式を拡張した正則な接続であることが Griffiths, N. Katz らにより証明されている. 一般次元での定式化と証明は Deligne [19] による.

定理 3.23 (Gauss–Manin 接続の正則性) S を滑らかな射影代数多様体 $\overline{S}$ の Zariski 開集合であるとする. 滑らかで固有な正則射 $f\colon M\to S$ に対し, $R^w f_*(\Omega^\bullet_{M/S})$ 上の Gauss–Manin 接続 ∇ は正則である. □

S が 1 次元の場合の正則性の意味を説明しておこう. $\overline{S}$ はコンパクト Riemann 面に他ならない. $Z=\overline{S}-S$ とおく. V を S 上の正則ベクトル束, ∇ を V 上の接続として, ∇ が正則であるとは, 各点 $s\in Z$ の近傍で任意の有理切断(rational section)が**穏やかな増大度**(moderate growth)をもつことをいう.

点 s の近傍は $D^*=D\setminus\{0\}$ $(D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\})$ であるとしてよい. $\pi_1(D^*)\simeq\mathbb{Z}$ の生成元のモノドロミー表現への作用を T と記そう. そこで $T=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,N)$ なる変換 N を選ぶ. D^* の普遍被覆 $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$ への V の引き戻しを $\widetilde{V}$ と記すと, V の平坦な切断 v に対して, 対応

$$v\longmapsto \exp(-(\log z)N)v$$

により

$$\mathcal{O}_{D^*}\otimes H^0(\mathbb{H},\widetilde{V})\simeq V$$

という同一視ができる. これにより V の D 上への標準的な延長 $\mathcal{O}_D\otimes H^0(\mathbb{H},\widetilde{V})$ が決まる.

V の切断 v が穏やかな増大度をもつとは, **標準的な延長**(canonical extension) $\mathcal{O}_D\otimes H^0(\mathbb{H},\widetilde{V})$ に関して v が $0\in D$ で有理型(meromorphic)であることと定義する. 標準的な延長は N の選び方に依存するが, 穏やかな増大度の定義はそれに依存しない.

D^* 上の (V,∇) が原点で正則(regular)であることは, 常微分方程式として表したとき原点が確定特異点であることと同値である.

次に Hodge 構造の変形の間の射(morphism)の定義をしておこう.

定義 3.24　$H=(H_A, F)$, $H'=(H'_A, F)$ を S 上の A-Hodge 構造の変形とする．H から H' への射とは，A 加群の局所定数層の射 $f_A\colon H_A \to H'_A$ であって，$f_{\mathcal{O}}=f_A\otimes_A\mathcal{O}\colon H_{\mathcal{O}}\to H'_{\mathcal{O}}$ がフィルター F と両立する，すなわち，

$$f_{\mathcal{O}}(F^pH_{\mathcal{O}})\subset F^pH'_{\mathcal{O}}$$

が成り立つものをいう．□

続いて，Hodge 構造の変形の偏極の定義を与えておく．

定義 3.25　Hodge 構造の変形の射

$$\Psi\colon H_A\otimes H_A \longrightarrow A(-w)$$

が各点 $s\in S$ におけるファイバー $\Psi_A(s)=\Psi_{A,s}$ で重さ w の A-Hodge 構造の偏極を与えるとき重さ w の A-Hodge 構造の変形 $H=(H_A, F)$ の**偏極**という．偏極を伴った Hodge 構造の変形を，**偏極 Hodge 構造の変形**(polarized VHS)と呼ぶ．□

例 3.26（重さ 1 の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形）　重さ 1 の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造は，偏極 Abel 多様体と 1 対 1 に対応した．これを族に拡張できる．偏極 Abel 多様体の族 $f\colon A\to S$ に対して，重さ 1 の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形 $R^1f_*\mathbb{Z}_A$ を対応させる函手は，S 上の偏極 Abel 多様体の族のなす圏と重さ 1 の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形のなす圏との圏(の逆)同値を与える．

これを証明するには，偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形と周期写像の対応，重さ 1 の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の分類空間が Siegel 上半空間の算術的な群による商空間 $\Gamma\backslash D$ であり，佐武コンパクト化により準射影多様体の構造をもつこと，また，代数多様体 S から $\Gamma\backslash D$ への正則写像は代数的であるという Borel の定理を使う．□

(c)　周期領域

第 2 章では(滑らかで射影的な)代数曲線に対してその(主偏極)Jacobi 多様体を対応させることにより，代数曲線のモジュライ空間を(主偏極)Abel 多様体のモジュライ空間へ埋め込むことができた．(主偏極)Abel 多様体は重さ 1 の偏極 Hodge 構造(1 次 Hodge 構造)と 1 対 1 に対応するので，重さ 2 以上の偏極 Hodge 構造を使うことが，代数曲面を始めとする代数多様体のモジュ

ライ空間を研究する一つの手段を与える.

代数多様体の族が与えられると，前項で見た通り高次順像により偏極 Hodge 構造の変形が対応する. Griffiths は周期領域を導入して，族の底空間の性質を調べるために，周期領域への周期写像を定義した. 周期領域上には自動的に(tautological に)普遍的な偏極 Hodge 構造の変形が存在し，周期写像との対応ができる.

この項では周期領域の定義と群論的記述に関する基本的事項を説明する. 周期写像の一般的な性質については次の節で説明する.

代数的トポロジーでは(C^∞)主束は底空間から分類空間への写像で分類された. その類似を Hodge 構造で考えることができる. $\mathbb{R}$-Hodge 構造はその複素化のフィルターの情報で定まるから，Grassmann 多様体の適当な直積内に(incidence)多様体が決まり，Hodge 構造の分類空間の役割を果たすというのがその粗筋である. $f\colon \mathfrak{X}\to B$ は複素多様体の間の滑らかな固有射で，$\mathfrak{X}$ は Kähler 計量をもっているとしよう. さらにいつものように B は弧状連結と仮定しよう. すると前項でみたように，$\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形(VHS) $R^w f_*\mathbb{Z}_{\mathfrak{X}}$ が得られる. $X_b = f^{-1}(b)$ $(b\in B)$ とおくと，$R^w f_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ の各ファイバー $(R^w f_*\mathbb{C})_b = H^w(X_b,\mathbb{C})$ は Hodge フィルター $F^p_b = \{F^p H^w(X_b,\mathbb{C})\}$ をもつ. また f が射影射であれば，$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = R^w_{\mathrm{prim}} f_*\mathbb{Z}_{\mathfrak{X}}$ は偏極可能である(例 3.16 を参照のこと). 以下 f は射影射であると仮定する.

局所定数層 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = R^w_{\mathrm{prim}} f_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ のファイバーは B 内の道(path)に沿って同一視することができる. 言い換えると，$\widetilde{B}\to B$ を普遍被覆とするとき $R^w_{\mathrm{prim}} f_*\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ の $\widetilde{B}$ への引き戻し $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}$ は自明であり，そのファイバーは互いに同一視できる. B の 1 点 $0\in B$ を固定すると，$\widetilde{B}$ の点は点 $b\in B$ と点 0 を始点とし点 b を終点とする道 r のホモトピー類との組 (b,r) と考えることができる. id_0 を 0 での定数値($id_0(t)=0$ $(0\leqq \forall t\leqq 1)$)とすると，同一視 $\widetilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}(0,id_0)} \simeq \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}(b,r)}$ とは，$\mathcal{H}_{\mathbb{C},0}$ と $\mathcal{H}_{\mathbb{C},b}$ を道 r (の代表元)に沿って同一視することに他ならない.

さて，この同一視の下で，$\{F^p_b\}$ を $H_0 = \mathcal{H}_{\mathbb{C},0}$ のフィルターとみることができるので，このようなフィルターの全体の空間を考察することに意味があることが分かる. $f^p = \dim F^p_b$ は $b\in B$ によらず一定であることに注意する.

そこで，H_0 上の偏極 Hodge 構造の全体を複素多様体として記述することを考える．

まず，$\dim F^p = f^p$ である H_0 のフィルター $H_0 = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^w$ の全体を考え，

$$(3.4)\quad \widehat{\mathcal{F}} = \{\{F^p\}_{p=1}^{w} \mid F^p \in \mathrm{Grass}(f^p, H_0),\ F^1 \supset F^2 \supset \cdots \supset F^w\} \subset \prod_{p=1}^{w} \mathrm{Grass}(f^p, H_0)$$

とおくと，$\{F_b^p\} \in \widehat{\mathcal{F}}$ である．ただし，$\mathrm{Grass}(f^p, H_0)$ は H_0 の f^p 次元部分線型空間全体のなす Grassmann 多様体である．$\widehat{\mathcal{F}}$ は Grassmann 多様体の直積の閉部分多様体である．偏極構造を定める H_0 上の双線型型式 Q (3.1)を使って

$$(3.5)\quad \check{D} = \left\{\{F^p\} \in \widehat{\mathcal{F}} \mid Q(F^p, F^{W-p+1}) = 0,\ 1 < p < w\right\}$$

(3.6)

$$D = \left\{\{F^p\} \in \check{D} \mid (\sqrt{-1})^{p-q} Q(v, \overline{v}) > 0,\ 0 \neq \forall v \in H^{p,q}\ (p+q = w)\right\}$$

とおく．このとき，$\{F^p\} \in D$ は Q によって偏極 Hodge 構造をもつことに注意する．また，Q から偏極構造が定まり，$\dim F^p = f^p$ である偏極 Hodge 構造 $\{F^p\}$ に対して $\{F^p\} \in D$ が成り立つ．そこで D を(H_0 と同じ Hodge 数をもつ Q で偏極可能な)**Hodge 構造の分類空間**(classifying space of Hodge structures)，あるいは Griffiths の**周期領域**(period domain)と呼ぶ．

ところで，$\check{D}$ は $\widehat{\mathcal{F}}$ の閉部分多様体であり，したがってコンパクトである．後に $\check{D}$ は非特異であることを示す．$\check{D}$ を周期領域 D の**コンパクト双対**(compact dual)と呼ぶ．D は $\check{D}$ の開集合である．さらに，D の定義(3.6)では，$H^{p,q}$ の代わりに $E^p = \{v \in F^p \mid Q(v, F^{q+1}) = 0\}$ を用いた方がより都合のよいこともある．ところで H_0 は $\check{D}$ 上の自明な正則ベクトル束と考えることができ(3.4)より自動的に正則ベクトル束からなる減少フィルター

$$(3.7)\quad H_0 = \mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F}^1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}^w \supset 0$$

が $\check{D}$ 上に存在する．ここでベクトル束 $\mathcal{F}^p$ の階数は f^p である．

次に，$D, \check{D}$ の等質空間としての表示を与えよう．$\mathbb{Z}$ 加群 H とその上の双

線型型式 Q を考え (H,Q) が偏極 Hodge 構造を定める場合を考えよう．このとき，双線型型式 Q を保つ自己同型のなす群

$$G=\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{R}},Q),\quad G_{\mathbb{C}}=\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{C}},Q),\quad G_{\mathbb{Z}}=\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{Z}},Q)$$

を考える．w の偶奇にしたがって，G はそれぞれ直交群，シンプレクティック群となる．このとき，線型代数の議論より，G は D に推移的に作用し，$G_{\mathbb{C}}$ は $\check{D}$ に推移的に作用することが分かる．

問1　このことを確かめよ．

偏極 Hodge 構造 $\{F_0^p\}$ に対応する D の点を $0\in D\,(\subset\check{D})$ としよう．G（または $G_{\mathbb{C}}$）内の点 0 の固定化部分群を P（または B）とおく．

$$P=\{g\in G_{\mathbb{C}}\mid gF_0^p=F_0^p,\ 1\leqq p\leqq w\}$$
$$B=P\cap G$$

である．

$B\in g$ は $\{F_0^q\}$ も固定するので，各 $H_0^{p,q}$ を固定する．したがって，正定値 Hermite 型式 $(\sqrt{-1})^{p-q}Q(\ ,\ )$ を不変にするので，B がコンパクト Lie 群であることが分かる．

P,B の定義から直ちに，$\check{D},D$ の等質空間としての表示

$$\check{D}\simeq G_{\mathbb{C}}/P,\quad D\simeq G/B$$

を得る．特に，前者より $\check{D}$ が複素多様体であることが明らかとなる．したがって $\check{D}$ は $\hat{\mathcal{F}}$ の非特異部分代数多様体である．

例 3.27（重さ 1 の周期領域）　重さ 1 の $\mathbb{Z}$-Hodge 構造 H に対して $H_{\mathbb{Z}}$ の基底を $\{e_1,e_2,\cdots,e_{2g}\}$，$2g=\dim_{\mathbb{R}}H_{\mathbb{R}}$ とおく．この基底に関する Q の行列表示を $E=(Q(e_i,e_j))$ とすると，Q の歪対称性から $H_{\mathbb{Z}}$ の基底をうまく選べば E は(2.19)の表示をもつ．

$$E=\begin{pmatrix}0 & \Delta\\ -\Delta & 0\end{pmatrix}$$

を固定すると周期領域 D とそのコンパクト双対 $\check{D}$ は

$$\check{D} = \{F \in \mathrm{Grass}(g, H_{\mathbb{C}}) \mid {}^t\Omega(F)E\Omega(F) = 0\}$$
$$D = \{F \in \check{D} \mid \sqrt{-1}\,{}^t\Omega(F)E\overline{\Omega(F)} > 0\}$$

と表される．ここで，$\Omega(F)$ は F の基底を並べてできる $2g\times g$ 行列を表す．既に前章で述べたように D の各元は

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \Delta \end{pmatrix}, \quad \tau \in \mathfrak{S}_g$$

と書ける．ここで $\mathfrak{S}_g$ は g 次 Siegel 上半空間である．これより，D は $\mathfrak{S}_g$ と正則同型であることが分かり，

$$G_{\mathbb{R}} \simeq Sp(2g, \mathbb{R}), \quad G_{\mathbb{C}} \simeq Sp(2g, \mathbb{C}), \quad G_{\mathbb{Z}} \simeq Sp(\Delta, \mathbb{Z})$$

であることが分かる．したがって，重さ 1 の偏極 Hodge 構造の周期領域は対称空間である．また以上のことより，前章の偏極 Abel 多様体の理論は重さ 1 の偏極 Hodge 理論に他ならないことが分かる．　□

例 3.28（重さ 2 の周期領域）　階数 $2r+s$ の $\mathbb{Z}$ 自由加群 $H_{\mathbb{Z}}$ とその $\mathbb{Z}$ 基底 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{2r+s}\}$ を考える．整数係数 $(2r+s)\times(2r+s)$ 対称行列 Q は正の固有値を s 個，負の固有値を $2r$ 個もつと仮定する．行列 Q は $H_{\mathbb{C}}$ 上の双線型型式を定める．$H_{\mathbb{C}}$ の元を上の基底を使って縦ベクトルとして表示する．$(2r+s)\times r$ 行列 Ω が

$$\begin{cases} {}^t\Omega Q\Omega = 0, \\ -{}^t\Omega Q\overline{\Omega} > 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

を満足すれば Ω の各列を基底とする $H_{\mathbb{C}}$ の r 次元部分空間 F^2 が定まる．さらに Q に関して直交する $H_{\mathbb{C}}$ の部分空間 F^1 の次元は Q が非退化であることより $r+s$ である．このようにして重さ 2 の Hodge 構造 $H_{\mathbb{C}} = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset F^3 = 0$ が定義できる．このとき $H^{1,1} = F^1 \cap \overline{F^1}$ の次元は s である．さらに Q の固有値の仮定から，Q を $H^{1,1}$ に制限したものは Hermite 型式として正定値である．したがって偏極構造が定義できる．これより行列 Q を固定すると重さ 2 の偏極 Hodge 構造は(3.8)を満足する $(2r+s)\times s$ 行列の同値類と 1 対 1 に対応することが分かる．ここで Ω と Ω' は

$$\Omega = \Omega' G, \quad G \in GL(r, \mathbb{C})$$

のとき同値である．これより周期領域 D とそのコンパクト双対 $\check{D}$ は

$$\check{D} = \{F \in \mathrm{Grass}(r, H_{\mathbb{C}}) \mid {}^t\Omega(F) Q \Omega(F) = 0\}$$
$$D = \{F \in \check{D} \mid {}^t\Omega(F) Q \overline{\Omega(F)} < 0\}$$

であることが分かる．また

$$G \simeq O(s, 2r), \quad B \simeq O(s) \times O(2r)$$

となり，$r=1$ または $s=2$ の場合のみ D は IV 型対称領域となるが，他の場合は対称領域ではない．ここで $O(m,n)$ は符号 (m,n) の 2 次型式を不変にする直交群，$O(m)$ は m 次直交群である． □

一般に重さ $w=2m$ の偏極 Hodge 構造の場合 $h^j = \dim H_{\mathbb{C}}^{j, 2m-j}$ とおき

$$h_+ = \sum_{j=0}^{m} h^{2j}, \quad h_- = \sum_{k=1‘0}^{m-1} h^{2j+1}$$

とおくと

$$G \simeq O(h_+, h_-), \quad B \simeq U(h^0) \times U(h^1) \times \cdots \times U(h^{m-1}) \times O(h^m)$$

であることが分かる．ここで $U(s)$ は s 次のユニタリ群である．一方，重さ $w=2m+1$ の偏極 Hodge 構造の場合 $h = h_+ + h_-$ とおくと

$$G \simeq Sp(h, \mathbb{R}), \quad B \simeq U(h^0) \times \cdots \times U(h^m)$$

であることが分かる．これより分かるようにコンパクト群 B はほとんどの場合 G の極大コンパクト群ではなく，したがって周期領域はこの場合対称領域ではない．

次に，$\check{D}$ の点 $0 = \{F^p\}$ での接空間 $T_0(\check{D})$ を調べておこう．Grassmann 多様体 $\mathrm{Grass}(f^p, H_{\mathbb{C}})$ の点 F^p での接空間は $\mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p)$ であるので

$$T_0\check{D} \subset \bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p) \tag{3.9}$$

が成り立つ．$b = \{F^p\} \in D$ のときも

$$T_0 D \subset \bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p) \tag{3.10}$$

が成り立つ．以上の考察を $\check{D}$ の各点で行なうことによって $\check{D}$ の接束 $T(\check{D})$

に関しても同様の記述ができる．

$$(3.11)\qquad T(\check{D})\subset\bigoplus_{p=1}^{w}\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^p, H_{\mathbb{C}}/\mathcal{F}^p)$$

ここで $\mathcal{F}^p$ は(3.7)で定義された $\check{D}$ 上のベクトル束であり，$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^p, H_{\mathbb{C}}/\mathcal{F}^p)$ はベクトル束と考える．D の接束に関しては右辺を D 上に制限すればよい．

$$(3.12)\qquad T(D)\subset\bigoplus_{p=1}^{w}\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^p, H_{\mathbb{C}}/\mathcal{F})|D$$

上の等質空間としての表示を使って $\check{D}$ の接空間を Lie 代数を使って記述してみよう．Lie 群 $G_{\mathbb{C}}$，P の Lie 代数 $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}}), \mathrm{Lie}(P)$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}$ と記すと

$$(3.13)\qquad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\{Z\in\mathrm{End}(H_{\mathbb{C}})\mid \text{任意の元 } u,v\in H_{\mathbb{C}} \text{ に対して } Q(Zu,v)+Q(u,Zv)=0\}$$

$$(3.14)\qquad \mathfrak{p}=\{Z\in\mathfrak{g}\mid Z(F^p)=F^p,\ 1\leqq p\leqq w\}$$

と書くことができる．P の $T_b\check{D}$ への作用は $\mathfrak{g}$ への随伴作用 Ad から引き起こされるので $\check{D}$ の接束 $T\check{D}$ は

$$G_{\mathbb{C}}\times_P(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p})\longrightarrow G_{\mathbb{C}}/P=\check{D}$$

と書くことができる．ここで $G_{\mathbb{C}}\times_P(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p})$ は P の $G_{\mathbb{C}}\times(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p})$ への作用

$$(g,z)\longmapsto(ga^{-1},\mathrm{Ad}(a)z)$$

による商空間である．(3.9)から単射準同型写像

$$(3.15)\qquad \mu\colon T_b\check{D}\simeq(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p})\hookrightarrow\bigoplus_{p=1}^{w}\mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p)$$

が定まる．ここで $Z\in\mathfrak{g}$ に対して Z が定める準同型写像 $F^p\to H_{\mathbb{C}}/F^p$ を Z_p と記すと

$$(3.16)\qquad \mu(Z \bmod \mathfrak{p})=(Z_1, Z_2, \cdots, Z_w)$$

であることが分かる．

以上の記述は Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G)$ の Hodge 構造を使うと綺麗に整理することができる．

G の定義より

$$\mathfrak{g}=\{X\in \mathrm{Hom}(H_{\mathbb{R}},H_{\mathbb{R}})\mid \text{任意の } u,v\in H_{\mathbb{R}} \text{ に対して } Q(Xu,v)+Q(u,Xv)=0\}$$

であることは明らかである．$\mathrm{Hom}(H,H)$ が重さ 0 の Hodge 構造

$$\mathrm{Hom}(H,H)_{\mathbb{C}}=\bigoplus_r \mathrm{Hom}(H,H)^{r,-r},$$

$$\mathrm{Hom}(H,H)^{r,-r}=\bigoplus_{p+q=w}\mathrm{Hom}(H^{p,q},H^{p+r,q-r})$$

をもつので，$\mathfrak{g}$ も重さ 0 の Hodge 構造をもつ:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}=\bigoplus_r \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{r,-r},\quad \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{r,-r}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\cap \mathrm{Hom}(H,H)^{r,-r}.$$

P は $F_0=\{F_0^p\}$ を保つ自己同型の全体であり，$B=G\cap P$ であったから，$\mathfrak{b}=\mathrm{Lie}(B)$ と記すと

$$\mathfrak{p}=F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\bigoplus_{r\geqq 0}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{r,-r},\quad \mathfrak{b}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}$$

となる．すると $\check{D}$ の等質空間としての表示から $\check{D}$ の点 0 での接ベクトル空間は

$$T_0\check{D}\simeq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p}=F^{-\infty}/F^0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

と表示することができる．

$0\in D$ としていたので，写像 $D=G/B\hookrightarrow \check{D}=G_{\mathbb{C}}/P$ の接空間をみると，

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{b}=\mathfrak{g}/F^0\cap\mathfrak{g}\longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{p}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/F^0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

が得られる．これは全単射ゆえ，写像 $D=G/B\hookrightarrow \check{D}=G_{\mathbb{C}}/P$ が開集合の包含写像であることがいえる．もっともこれは D と $\check{D}$ の定義(3.5), (3.6)から明らかではある．

問 2　この全単射性を確かめよ．

$0\in D$ としていたので，偏極 Q は任意の点 $b=g\cdot 0\in D$ $(g\in G)$ の接空間 T_bD に正定値 Hermite 型式 $Q(Cg\bullet,g\bar{\bullet})$ を定める．これは D の G 不変な Hermite 構造を定める．

Hodge–Riemann の第 2 の双線型関係式(HR.2)より

$$H_{\mathrm{even}} = \bigoplus_{p:\mathrm{even}} H^{p,w-p}, \quad H_{\mathrm{odd}} = \bigoplus_{p:\mathrm{odd}} H^{p,w-p}$$

は Q に関して互いに直交し，それぞれの空間上で Q は定値である．

$$K = \{g \in G \mid gH_{\mathrm{even}} = H_{\mathrm{even}}\}$$

とおくと，K は G の極大コンパクト部分群を与え，かつ明らかに $K \supset B$ である．

Riemann 対称空間上の G 共変なファイバー空間

$$D = G/B \longrightarrow G/K$$

を考えると，ファイバーの K 軌道 $K\cdot b$ は D のコンパクトな複素部分多様体である．このファイバー空間に関して D の接束を水平方向と垂直方向に(C^∞ ベクトル束として)分解することができる．接空間のレベルでは

$$T_0D = T_0^hD \oplus T_0^vD, \quad T_0^hD = \bigoplus_{p:\mathrm{even}} \mathfrak{g}^{p,-p}, \quad T_0^vD = \bigoplus_{p:\mathrm{odd}} \mathfrak{g}^{p,-p}$$

である．水平接ベクトル空間 T_0^hD の別の見方は後の(3.21)で与えられる．周期領域に関する最初の重要な結果は，Griffiths と Schmid の次の定理である．

定理 3.29 (Griffiths–Schmid, 1969)　(上で構成された)周期領域 D の G 不変な Hermite 計量に関して，TD^h 方向の正則断面曲率はある負の定数で上から抑えられる．　□

この定理のおかげで，Schwarz の補題の一般化である Ahlfors の補題[*3]が周期写像に適用できて，様々な応用が得られる．

§3.2　周期写像と Torelli 問題

射影多様体の滑らかな族 $f\colon \mathfrak{X} \to S$ あるいは(S 上の)偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形 $\mathcal{H}$ に対して，底空間 S から周期領域の商への写像 $p\colon S \to \Gamma\backslash D$ が，各点 $s \in S$ にファイバーの偏極 Hodge 構造 $R^w f_*\mathbb{Z}$ あるいは $\mathcal{H}(s)$ を対応させる

*3　(1次元)開円板からの正則写像で，接空間の像の正則断面曲率が負の定数で上から抑えられているものは，距離を縮小する，という主張．

ことにより得られる．これが Griffiths の周期写像である．

周期領域の接ベクトル束には水平的な方向(分布)があり，それに関して周期写像は水平的で，局所的に(D に)持ち上げ可能であることが分かる．この水平性は，Griffiths 横断性の反映に他ならない．

周期写像の定義域がモジュライ空間のときの周期写像の単射性が，本来の Torelli の定理の(理想的な)形であり，その単射性を問う問題を大域的 Torelli 問題と呼ぶ．

Torelli 問題には，さらに周期写像 p がある点の近傍で埋め込みになっているか否かを問う無限小 Torelli 問題と，周期写像がモジュライ空間の一般の点で単射であるか否か(単射にならない例外の点の存在を許す)を問う弱大域的 Torelli 問題という型の問題が考えられる．

一般の代数多様体のモジュライ空間の性質はまだまだ研究途上である．それと呼応するように大域的 Torelli 問題は証明が困難であり，閉 Riemann 面以外では肯定的に解決されているのは偏極 K3 曲面の場合，3 次元 3 次超曲面の場合などごく少数にとどまっており，かつ証明は極めて技術的である．

それに対して無限小 Torelli 問題は比較的簡単であり，小平–Spencer 写像の理論により周期写像の接写像はコホモロジー論的な解釈が可能であり，多くの例で無限小 Torelli 問題が肯定的であることを示すことができる．

弱大域的 Torelli 問題については，大域的 Torelli 問題に比べればかなり多くの代数多様体のクラスについて肯定的に成り立つ．それらは，主に(重み付き)射影空間等の完全交叉となっている場合である(Donagi, Green)．(弱)大域的 Torelli 問題では不連続群 Γ をどのようにとるかも重要な問題になってくる．そのためにはモジュライ空間，または族の底空間 S の基本群のコホモロジー群への表現，いわゆるモノドロミー表現の考察が重要になってくる．

Griffiths の導入した周期領域の一般論については§3.1(c)でみた通りである．引き続きここでは周期写像の一般的性質を述べ，そして周期写像の幾何への応用として Torelli 型の問題を論じる．

(a)　周期写像

複素多様体 S 上の重さ w の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形 $\mathcal{H}=(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}},\mathcal{F},\Psi)$ を考える．1点 $s_0\in S$ を固定して $H_{\mathbb{Z}}=\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(s_0)$，$F^p=\mathcal{F}^p(s_0)=\mathcal{F}^p\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S,s_0}/\mathfrak{m}_{s_0}$，$\psi=\Psi(s_0)$ とおく．偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}},\{F^p\},\psi)$ を基準にして，周期領域 D とそのコンパクト双対 $\check{D}$ を構成する．$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}|U\simeq U\times H$ となるように点 s_0 の近傍 $U\subset S$ をとると，各点 $u\in U$ に対して $\mathcal{F}^p(u)$ は $H_{\mathbb{C}}=H\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$ の $f^p=\dim F^p$ 次元部分ベクトル空間とみることができる．$\mathcal{F}^p$ は局所自由層であったので写像

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathrm{Grass}(f^p,H_{\mathbb{C}}) \\ u & \longmapsto & \mathcal{F}^p(u) \end{array}$$

は正則写像である．このことより正則写像

$$\begin{array}{cccc} \phi_U: & U & \longrightarrow & \prod_{p=1}^{w}\mathrm{Grass}(f^p,H_{\mathbb{C}}) \\ & u & \longmapsto & (\mathcal{F}^1(u),\mathcal{F}^2(u),\cdots,\mathcal{F}^w(u)) \end{array}$$

が定義でき，ϕ_U の像は D に含まれることが分かる．この正則写像は $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ の U での自明化 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}|U\simeq U\times H$ に依存する．U の別の点 s_1 をとり，U の自明化を s_1 の近傍に拡張することによって正則写像 ϕ_U を s_1 の近傍に解析接続することができる．この操作を続けて ϕ_U の解析接続を行ない s_0 に戻ってくると，結果は必ずしも ϕ_U とは一致しない．これは $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ の自明化が最初のものとずれてきて，$\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{Z}})$ の元による作用の分だけ変わるからである．このずれは s_0 から出て s_0 に戻る S 内の逆のホモトピー類によって決まる．さらに，実際は偏極構造を考えているので，Ψ より決まる $H_{\mathbb{Z}}$ 上の双線型型式 Q を保つ．したがって群の準同型写像

$$\rho:\ \pi_1(S,s_0)\longrightarrow G_{\mathbb{Z}}=\mathrm{Aut}(H_{\mathbb{Z}},Q) \tag{3.17}$$

が定まる．これを S の基本群 $\pi(S,s_0)$ の**モノドロミー表現**(monodromy representation)と呼ぶ．モノドロミー表現は基点 s_0 のとり方と，s_0 の近傍での $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ の自明化によって変わるが，それはすべて $G_{\mathbb{Z}}$ の元 h による共役

(conjugation) $h\rho h^{-1}$ の違いだけである.

一方 ϕ_U を S 上解析接続することによって，S の普遍被覆多様体 $\widetilde{S}$ から D への正則写像

(3.18)
$$\widetilde{\phi}\colon \widetilde{S} \longrightarrow D$$

が定義できる．このとき S の基本群 $\pi_1(S,s_0)$ を $\widetilde{S}$ の被覆変換と考えると

$$\widetilde{\phi}(\gamma\cdot\widetilde{s}) = \rho(\gamma)\widetilde{\phi}(\widetilde{s}),\quad \gamma\in\pi_1(S,s_0),\quad \widetilde{s}\in\widetilde{S}$$

が成立している．そこで $\Gamma = \mathrm{Im}\,\rho = \rho(\pi_1(S,s_0))$ とおくと正則写像(3.18)から正則写像

(3.19)
$$\phi\colon S \longrightarrow \Gamma\backslash D$$

が定義できる．$G_{\mathbb{Z}}$ の D への作用は真性不連続であり，したがって Γ の D への作用もそうであり，$\Gamma\backslash D$ は複素解析空間の構造をもつことに注意する．ϕ を**周期写像**(period map)と呼ぶ．Γ は $G_{\mathbb{Z}}$ の部分群であるので(3.19)の ϕ から正則写像

$$S \longrightarrow G_{\mathbb{Z}}\backslash D$$

が定まる．この写像も ϕ と記して，周期写像と呼ぶことが多い．

ところで，$\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形では条件の一つとして Griffiths 横断性(定義 3.19(2))を課していた．この条件により周期写像 ϕ は S から $\Gamma\backslash D$ への単なる正則写像という以上の強い制約を受ける．Griffiths 横断性は $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_S}$ の平坦接続 ∇ と Hodge フィルターの間に

$$\nabla\mathcal{F}^p \subset \Omega^1_S\otimes\mathcal{F}^{p-1},\quad 1\leqq p\leqq w$$

なる関係が成立することを主張する．

さて，上と同じ点 $s_0\in S$ および s_0 の近傍 U および U 上の $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ の自明化 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}|U \simeq U\times H_{\mathbb{Z}}$ を固定して考える．U は s_0 の座標近傍であると仮定し，s_0 を中心とする局所座標 $(z_1,\cdots,z_n)$ を選んでおく．$H_{\mathbb{C}}$ の基底 $\{e_1,e_2,\cdots,e_h\}$ を $\{e_1,e_2,\cdots,e_{f^p}\}$ が F^p の基底であるように選ぶ．U は十分小さくとって $\mathcal{F}^p|U$ は $\mathcal{O}_U$ 自由加群であると仮定してよい．このとき $\mathcal{F}^p|U$ の $\mathcal{O}_U$ 加群としての基底 $\{\widetilde{e}_1(z),\cdots,\widetilde{e}_{f^p}(z)\}$ を

$$\widetilde{e}_j(z) = e_j + \sum_{k=1}^{h}\lambda_{jk}(z)e_k$$

であるように選ぶ．ここで $\lambda_{jk}(z)$ は $\lambda_{jk}(0)=0$ となる U 上の正則函数である．このとき正則写像 ϕ_U の点 s_0 での微分

$$(d\phi_U)_{s_0}\colon T_{s_0}S \longrightarrow T_bD \subset \bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p)$$

は $\mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p)$ 上では

$$(d\phi_U)_{s_0}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)(e_j) = \sum_{k=f^p+1}^{w} \frac{\partial \lambda_{jk}(0)}{\partial z_i} e_k, \quad 1 \leqq i \leqq f^p$$

で与えられる．一方，平坦接続 ∇ は

$$\nabla(\widetilde{e}_j(z)) = \sum_{i=1}^{n} dz^i \otimes \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \lambda_{jk}(z)}{\partial z_i} e_k\right), \quad 1 \leqq j \leqq f^p$$

で与えられる．Griffiths 横断性は U 上で

$$\frac{\partial \lambda_{jk}(z)}{\partial z_i} = 0, \quad 1 \leqq j \leqq f^p,\ k \geqq f^{p-1}+1$$

であることを意味する．$\widetilde{e}_j(0)=e_j$ に注意すれば，これは

$$\widetilde{e}_j(z) = e_j + \sum_{k=1}^{f^{p-1}} \lambda_{jk}(z) e_k, \quad 1 \leqq j \leqq f^p \tag{3.20}$$

を意味し，$(d\phi_U)_{s_0}\left(\dfrac{\partial}{\partial z_i}\right)$ の $\mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p)$ 成分は $\mathrm{Hom}(F^p, F^{p-1}/F^p)$ に含まれることが分かる．これより $(d\phi_U)_{s_0}$ の像は

$$\bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p/F^{p+1}, F^{p-1}/F^p) \subset \bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p)$$

に含まれることが分かる．そこで $\bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p, H_{\mathbb{C}}/F^p)$ 内で

$$T_b^h \check{D} = T_b\check{D} \cap \bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p/F^{p+1}, F^{p-1}/F^p) \tag{3.21}$$

とおき，$T_b^h\check{D}$ を点 b での $\check{D}$ の**水平接ベクトル空間**(horizontal tangent vector space)と呼ぶ．$\check{D}$ の各点で水平接ベクトル空間をとることによって**水平接ベクトル束**(horizontal tangent bundle) $T^h\check{D}$ が定義できる．

Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$, $\mathfrak{p}=\mathrm{Lie}(P)$ を使うと，水平接ベクトル束は次のように記述できる．まず

$$\mathfrak{g}^{\mathrm{hor}} = \{Z \in \mathfrak{g} \mid Z(F^p) \subset F^{p-1},\ 1 \leqq p \leqq w\}$$

とおくと，$\mathfrak{g}^{\mathrm{hor}} \supset \mathfrak{p}$ である．すると(3.21)より

$$T_b^h(\check{D}) \simeq \mathfrak{g}^{\mathrm{hor}}/\mathfrak{p}$$

であることが分かる．さらに $\mathfrak{g}^{\mathrm{hor}}$ は $\mathrm{Ad}(\mathfrak{p})$ 不変であることが容易に分かる．したがって

$$\begin{array}{ccc} T^h(\check{D}) & \subset & T(\check{D}) \\ \| & & \| \\ G_{\mathbb{C}} \times_P (\mathfrak{g}^{\mathrm{hor}}/\mathfrak{p}) & \subset & G_{\mathbb{C}} \times_P (\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) \end{array}$$

であることが分かる．$b \in D$ のときは $T_b^h(D) = T_b^h(\check{D})$ と定義する．$T^h(D)$ は $T^h(\check{D})$ を D 上に制限したものに他ならない．

さて複素多様体 M からの正則写像 $\varphi\colon M \to \check{D}$ は $d\varphi$ が TM から $T^h(\check{D})$ への写像であるとき**水平的**(horizontal)と呼ぶ．また正則写像 $\varphi\colon M \to \Gamma\backslash D$ は M の各点で小近傍 V を適当に選ぶと

$$\varphi|V : V \longrightarrow D \longrightarrow \Gamma\backslash D$$

と正則写像に分解できるとき**局所的に持ち上げ可能**(locally liftable)と呼ぶ．このとき各 $\varphi|V$ が水平的であれば φ を水平的であるという．以上によって次の事実が証明された．

定理 3.30　複素多様体 S 上の重さ w の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形 $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{F}, \Psi)$ に対して周期写像

$$\phi\colon S \longrightarrow G_{\mathbb{Z}}\backslash D$$

が定義できる．周期写像 ϕ は局所的に持ち上げ可能であり，水平的である．□

さて滑らかな射影射 $f\colon \mathfrak{X} \to S$ から決まる $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = R^w_{\mathrm{prim}} f_* \mathbb{Z}$ 上の重さ w の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造を考えよう．このとき周期写像の微分

$$(d\phi)_s\colon T_s S \longrightarrow T_b^h(D) \subset \bigoplus_{p=1}^{w} \mathrm{Hom}(F^p/F^{p+1}, F^{p-1}/F^p)$$

と小平–Spencer 写像 ρ_{s_0} との関係を調べておこう．

$F^p/F^{p+1} \simeq H^q(X_s, \Omega^p_X)$ であることに注意する．ただし $p+q=w$ である．接ベクトル $\xi \in T_s S$ に対して $\rho_s(\xi) \in H^1(X_{s_0}, \Theta_{X_{s_0}})$ である．カップ積

$$H^1(X_s, \Theta_{X_s}) \times H^q(X_s, \Omega^p_{X_s}) \longrightarrow H^{q+1}(X_s, \Theta_{X_s} \otimes \Omega^p_{X_s})$$

と**縮約**(contraction)

$$H^{q+1}(X_s, \Theta_{X_s} \otimes \Omega^p_{X_s}) \longrightarrow H^{q+1}(X_s, \Omega^{p-1}_{X_s})$$

の合成を考えることによって $\rho_s(\xi)$ から線型写像

$$\sigma^p(\xi)\colon H^q(X_s, \Omega^p_{X_s}) \longrightarrow H^{q+1}(X_s, \Omega^{p-1}_{X_s})$$

が定義できる．$H^q(X_s, \Omega^p_{X_s})_0$ をコホモロジーの原始的部分の Hodge 分解

$$H^w_{\mathrm{prim}}(X_s, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=w} H^q(X_s, \Omega^p_{X_s})_0$$

の (p,q) 成分とし，この写像を原始的部分 $H^q(X_s, \Omega^p_{X_s})_0$ に制限したものも同じ記号 $\sigma^p(\xi)$ で記す．すると写像

$$\sigma^p(\xi)\colon H^q(X_s, \Omega^p_{X_s})_0 \longrightarrow H^{q+1}(X_s, \Omega^{p-1}_{X_s})_0$$

を得る．このとき，次の定理は命題 3.21 より導くことができる．

定理 3.31　上記の仮定のもとで $\xi \in T_sS$ に対して

$$\mu \circ (d\phi)_s(\xi) = (\sigma^1(\xi), \sigma^2(\xi), \cdots, \sigma^w(\xi))$$

が成立する．　□

最後に，周期写像の拡張可能性に関する一般的な性質を挙げよう．

まず，Griffiths と Schmid による Hartogs 型の定理がある．

定理 3.32　Z をコンパクトな複素多様体 S の余次元が 2 以上の部分多様体とする．$p\colon S \setminus Z \to \Gamma \backslash D$ を局所的に持ち上げ可能な正則写像で，局所的な持ち上げは水平的であるとする．

すると，p は局所的に持ち上げ可能な正則写像 $\tilde{p}\colon S \to \Gamma \backslash D$ に拡張する．□

これにより，周期写像の境界としては，余次元 1 の因子を主に考えればよいことになる．その場合の，詳しい解析は次の節にまわすが，一番簡単な次の事実をここで挙げる．

定理 3.33 (除去可能特異点定理)　Z を代数多様体 S の部分代数多様体とする．H を $S \setminus Z$ 上の偏極 Hodge 構造の変形として，その Z のまわりのモノドロミーは局所有限(locally finite)であるとする．すると $\widetilde{H}|S \setminus Z = H$ を満たす S 上の偏極 Hodge 構造の変形 $\widetilde{H}$ が存在する．

対応する周期写像の言葉で述べると，$\phi\colon S \setminus Z \to \Gamma \backslash D$ に対応する周期写

像は $\widetilde{\phi}\colon S \to \Gamma\backslash D$ に拡張する. □

これは§3.1 で触れた Griffiths–Schmid の定理 3.29 の応用として得られる. Griffiths et al. [39]参照.

(b)　Torelli 問題の定式化

Torelli の定理を一般次元の射影多様体に対して組織的に考察したのは 1960 年代の終わり P. H. A. Griffiths であった. Griffiths の周期領域と周期写像の一般論については前項までで見た通りである. それを用いた Torelli 問題をここで定式化する. Torelli 問題を研究する方法と具体例に関する議論は次項以降で紹介しよう.

滑らかな射影射 $f\colon \mathfrak{X} \to S$, および, それから決まる重さ w の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = R^w_{\mathrm{prim}} f_*\mathbb{Z}$ を考えよう. $w = \dim f^{-1}(s)$ の場合に主に興味があることは, Lefschetz の超平面切断定理等から察せられるであろう. これに対応して周期写像

$$p\colon S \longrightarrow \Gamma\backslash D$$

が定まる. 周期領域 D は $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ のファイバーの Hodge 構造で決まり, Γ は(S の基本群の作用による)モノドロミー群である.

この周期写像 p について, 次の三つの Torelli 型の問題を問うことができる.

（i）　無限小 Torelli 問題

（ii）　大域的 Torelli 問題

（iii）　弱大域的 Torelli 問題

最初の**無限小 Torelli 問題**(infinitesimal Torelli problem)は, 一般に周期写像 $p\colon S \to \Gamma\backslash D$ がある点 s の近傍で埋め込みになっているかどうかを問う問題である. 埋め込みである必要十分条件は p の微分 dp_s の単射性である.

実際には S が倉西族の底空間であるときを扱うのが普通であり, 我々もそう仮定する. すると, S は単連結と仮定できるので, Γ は自明となる. 多くの場合に無限小 Torelli 問題が肯定的であることが示されている. 一方, 超楕円曲線の場合では否定的である.

次項では，小平–Spencer 理論を使って微分 dp_s のコホモロジー論的な解釈を与え，いくつかの例を見ることにする．

大域的 Torelli 問題(global Torelli problem)は，S が射影多様体のモジュライ空間の場合に周期写像 p が単射であるか否かを問う問題である．

ここで射影多様体 X のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ とは，可微分多様体とみた X の上に入る複素構造(と上部構造)の同型類のなす集合を表す．$\mathcal{M}$ に(代数的スタック(algebraic stack)のような)適当な代数的構造が入るかどうかは X (とその上の偏極等の上部構造のとり方)による．$\mathcal{M}$ が代数多様体である場合に大域的 Torelli 問題を問うのが普通である．また，不連続群 Γ をどのようにとるか，S の基本群のコホモロジー群へのモノドロミー表現の考察が重要になってくる．

閉 Riemann 面のときの Torelli の定理は大域的 Torelli 問題の肯定的な解答を与える．それ以外で肯定的に解決されているのは偏極 K3 曲面の場合，3 次元 3 次超曲面の場合などごく少数である．また代数曲面に限っても，大域的 Torelli 問題の反例がいろいろと知られている．

弱大域的 Torelli 問題(weak global Torelli problem)*4 は周期写像 p がモジュライ空間の一般の点で単射であるか否か(単射にならない例外の点の存在を許す)を問う問題である．言い換えると，モジュライ空間 $\mathcal{M}$ が代数多様体であることを仮定して，その Zariski 開集合の上に p を制限した写像が(像の上で)次数 1 の写像であるかどうかを問うわけである．

大域的 Torelli 問題に比べ，比較的多くの肯定的に解決されている場合が知られている．閉 Riemann 面の場合 Torelli の定理よりはずっと証明がやさしく，高次元化しやすいことが見てとれる．射影空間等のコホモロジーの記述がよく分かっている空間の超曲面については，Hodge 構造の無限小変形を用いる方法が開発されている．

定義から，弱大域的 Torelli 問題の反例は大域的 Torelli 問題の反例でもあることに注意しておく．

---

*4　英語では，generic (global) Torelli problem と呼ぶことが多い．

(c)　無限小 Torelli 問題

偏極多様体 (X,L) の倉西族 $f\colon \mathfrak{X}\to S$ を考え，対応する周期写像の局所的な性質を調べてみよう．(X,L) は点 s_0 に対応し，以下，点 s_0 の近傍のみを問題にする．したがって，S を十分小にとることによって S は単連結であると仮定する．（実際は S の点 s_0 で非特異であると仮定する．）このときはモノドロミー表現を考える必要はないので周期写像は S から周期領域 D への写像

(3.22)
$$p\colon S\longrightarrow D$$

と考えることができる．このときの基本的な問題は無限小 Torelli 問題である．

無限小 Torelli 問題(infinitesimal Torelli problem)

周期写像(3.22)は点 s_0 の近傍で埋め込み写像であるか？

無限小 Torelli 問題は**局所 Torelli 問題**(local Torelli problem)とかつて呼ばれていた．1970 年代までの文献では局所 Torelli 問題と呼ばれることが多いので注意を要する．

この問題には定理 3.31 が重要な役割をする．

ところで，偏極多様体 (X,L) の倉西族は射影多様体 X の倉西族 $\widetilde{f}\colon\widetilde{\mathfrak{X}}\to\widetilde{S}$ の部分族として得られる．直線束 L が拡張できる部分 (X_s,L_s) を取り出すと s_0 の近傍では偏極多様体 (X,L) の倉西族になる．L が豊富な直線束であれば s が s_0 に近ければ L_s も豊富であるからである．したがって

$$T_{s_0}S\subset T_{s_0}\widetilde{S}$$

と考えることができ，かつ

(3.23)
$$T_{s_0}S=H^1(X,\Theta)^{c_1(L)}=\mathrm{Ker}\{H^1(X,\Theta)\xrightarrow{\wedge c_1(L)}H^2(X,\mathcal{O}_X)\}$$

が成り立つ．ここで $c_1(L)\in H^2(X,\mathbb{Z})$ は L の 1 次 Chern 類であり，$(1,1)$ 型のコホモロジー類である．

問 3　X 上の直線束 L が拡張することのできる方向は $H^1(X,\Theta)^{c_1(L)}$ で与えられ

ることを示せ.

さて，周期写像が点 s_0 の近傍で埋め込み写像であるための必要十分条件は点 s_0 での微分が単射であることであるので，無限小 Torelli 問題は定理 3.31 より

(3.24)
$$(dp)_{s_0}\colon H^1(X,\Theta)^{c_1(L)} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=w} \mathrm{Hom}(H^q(X,\Omega_X^p)_0,\ H^{q+1}(X,\Omega_X^{p-1})_0)$$

が単射であるか否かという問題になる．この写像は $H^q(X,\Omega_X^p)_0$ に $H^1(X,\Theta)^{c_1(L)}$ の各元のカップ積をとり，さらに縮約をとる写像
$$H^q(X,\Omega_X^p)_0 \times H^1(X,\Theta)^{c_1(L)} \longrightarrow H^{q+1}(X,\Omega_X^{p-1})_0$$
に他ならないので，無限小 Torelli 問題は純粋にコホモロジー論的に記述することができる.

実際に無限小 Torelli 問題をコホモロジーを使って再定式化するときは偏極多様体の倉西族ではなく通常の倉西族を使い

(3.25)
$$(dp)_{s_0}\colon H^1(X,\Theta) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=w} \mathrm{Hom}(H^q(M,\Omega_X^p),\ H^{q+1}(X,\Omega_X^{p+1}))$$

が単射であるかと問うことが多い．これは，代数多様体の偏極が標準束の場合や，豊富な直線束が倉西族に自然に拡張する場合を考察することが多いからである.

例 3.34　無限小 Torelli 問題を閉 Riemann 面の場合に考察してみよう．この場合は常に $H^1(X,\Theta)^{c_1(L)}=H^1(X,\Theta)$ であるので(直線束はすべて因子からきており，因子は点の和であるので因子は自動的にまわりの Riemann 面に延ばすことができる)写像(3.25)の単射性を考察すればよい．今の場合 1 次のコホモロジー群を考えるので
$$H^1(X,\Theta) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0(X,\Omega_X^1),H^1(X,\mathcal{O}_X)) \simeq H^0(X,\Omega_X^1)^\vee \otimes H^1(X,\mathcal{O}_X)$$
の単射性が問題になる．この写像の双対をとると Serre 双対性より

(3.26)
$$H^0(X,\Omega_X^1)\otimes H^0(X,\Omega_X^1) \longrightarrow H^2(X,(\Omega_X^1)^{\otimes 2})$$

が全射であるか否かが問題になる．これは種数が 1, 2 のときは常に全射であり，種数が 3 以上のときは超楕円曲線でなければ全射であることが分かる．一方，超楕円曲線のときは全射ではない．これによって種数が 3 以上のときは超楕円曲線でなければ無限小 Torelli 問題は肯定的に解けることが分かる．種数 3 以上の超楕円曲線のときは，超楕円インヴォリューション ι が倉西族の底空間に非自明的に作用するが，周期領域として現れる Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_g$ には超楕円インヴォリューション ι に対応する $Sp(2g,\mathbb{Z})$ の元は自明に作用することからも周期写像が局所的に埋め込みでないことが分かる．一方，倉西族の底空間 $\widetilde{S}$ に超楕円インヴォリューション ι は作用するが，周期写像から引き起こされる商空間 $\widetilde{S}/\iota$ から $\mathfrak{S}_g$ への写像は点 s_0 の像の近傍では単射である．これが本来の Torelli の定理が成立する根拠でもある． □

例 3.35 X が代数曲面の場合を考察しよう．このときは 2 次のコホモロジーを考える．写像(3.25)から特に

$$H^1(X,\Theta) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0(X,\Omega_X^2), H^1(X,\Omega_X^1))$$

が単射であるか否かを考えよう．言い換えればカップ積

$$H^0(X,\Omega_X^2)\times H^1(X,\Theta) \longrightarrow H^1(X,\Omega_X^1)$$

が単射であるかどうかを考える．特に $\Omega_X^2 \simeq \mathcal{O}_X$ のとき，言い換えると標準束 K_X が自明のときは $H^0(X,\Omega_X^2)\simeq\mathbb{C}$ となり上のカップ積は同型となる．したがってこのときは無限小 Torelli 問題は肯定的である．この条件を満足するのは代数曲面が K3 曲面や Abel 多様体のときである．以上の議論は標準束が自明の n 次元代数多様体 X の n 次元コホモロジーに対する周期写像に対して適用できる．すなわちカップ積

$$H^0(X,\Omega_X^n)\times H^1(X,\Theta) \longrightarrow H^1(X,\Omega_X^{n-1})$$

は単射であるので，このような代数多様体に対しても無限小 Torelli 問題は肯定的である．したがって，特に，標準束が自明であり $H^1(X,\mathcal{O}_X)=0$ で特徴づけられる **Calabi–Yau 多様体**では無限小 Torelli 問題は肯定的である． □

無限小 Torelli 問題は多くの場合肯定的であることが知られている．ここでは次の定理を挙げておこう．

定理 3.36 n 次元射影多様体 X 上の標準束 K_X が X 上の豊富な直線束 L

によって $K_X = L^{\otimes k}$, $k \geqq 1$ と表され次の条件が満足されていると仮定する.

(i)　有理写像 $\Phi_{|L|}\colon X \to \mathbb{P}^N$ は正則写像であり，X の近くのすべての変形に対して正則写像として拡張することができかつ像の次元は n である.

(ii)　$H^0(X, \Omega_X^{n-1} \otimes \mathcal{O}_X(L)) = 0$.

このとき

$$H^1(X, \Theta) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0(X, \Omega_X^n), H^1(X, \Omega_X^{n-1}))$$

は単射である．したがって，無限小 Torelli 問題は X に関して肯定的である.

□

証明については Liebermann et al. [63] を参照されたい.

この定理より $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の次数 $d \geqq n+3$ の超曲面や $\mathbb{P}^{n+k}$ の非特異完全交叉形 $V(a_1, \cdots, a_k)$ (次数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の超曲面の共通部分として定義され非特異であるもの)が $\sum_{j+1}^{k} a_j \geqq n+k+2$ を満足すれば無限小 Torelli 問題が肯定的であることが分かる.

曲面に限ってみると，K3 曲面や Abel 曲面の他に，(切断をもつ) $\mathbb{P}^1$ 上の楕円曲面に対して無限小 Torelli 問題が肯定的であることが知られている．この種の楕円曲面については弱大域的 Torelli 問題も肯定的である(Chakiris). 一方，一般型の曲面については反例が知られている．たとえば，ある種の $p_g = K^2 = 1$ の代数曲面*5については否定的である(Catanese, Todorov).

(d)　大域的 Torelli 問題と弱大域的 Torelli 問題

最初に(弱)大域的 Torelli 問題をもう一度述べておく.

モジュライ空間からの周期写像 $p\colon \mathcal{M} \to \Gamma \backslash D$ について，

大域的 Torelli 問題(global Torelli problem)

　周期写像 p は単射であるか？

弱大域的 Torelli 問題(weak(generic) global Torelli problem)

　モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は代数多様体であるとして，周期写像 p は $\mathcal{M}$ のある Zariski 開集合上次数 1 であるか？

---

*5　商が K3 曲面であるようなインヴォリューションをもち，その K3 曲面上の正則 2 次微分型式の引き戻しとして正則 2 次微分型式が得られる曲面.

モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は，可微分多様体とみた X の上に入る複素構造(と上部構造)の同型類のなす集合を表すが，$\mathcal{M}$ に適当な代数的構造が入るためには Hilbert スキームの理論と幾何学的不変式論，あるいは代数的スタックの理論による大掛かりな議論が必要である．たとえば，X が一般型なら準射影代数多様体の構造が入ることがいえる．これに関しては，向井[67]または Viehweg [96]を参照されたい．

閉 Riemann 面以外で大域的 Torelli 問題の成立する場合として有名なのが，K3 曲面である．Piatetskii–Shapiro と Shafarevich により Kummer 曲面*6の場合の詳しい解析をもとに証明された．その後，R. Friedman は(偏極) K3 曲面の退化を使った議論により K3 曲面に対する大域的 Torelli 問題の別証を与えた．(§3.3(c)参照．)

偏極 Abel 多様体については，コホモロジーの H^1 を使う限り大域的 Torelli 問題は成り立つ．一方，中間次元のコホモロジーを使う場合については次の例を見られよ．

例 3.37 例 3.35 で Abel 曲面の 2 次のコホモロジーに関する無限小 Torelli 問題が肯定的であることをみたので，今度はこの周期写像を大域的にみておこう．2 次元複素トーラス

$$T = \mathbb{C}/\Omega, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の $H_1(T,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ を上の周期行列の各行に対応するように選ぶ．$H_2(T,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{f_1,\cdots,f_6\}$ を

$$f_1 = e_1\wedge e_2, \quad f_2 = e_1\wedge e_3, \quad f_3 = e_1\wedge e_4,$$
$$f_4 = e_2\wedge e_3, \quad f_5 = e_2\wedge e_4, \quad f_6 = e_3\wedge e_4$$

と選び，$H^2(T,\mathbb{Z})$ の基底として双対基底 $\{f_1^*,\cdots,f_6^*\}$ をとる．このとき交点型式

*6 Abel 曲面 A のインヴォリューション $\iota(a)=-a$ $(a\in A)$ は 16 個の固定点をもつ．A を ι で割った曲面の 16 個の固定点の像でのブローアップした曲面を Kummer 曲面という．

$$H^2(T,\mathbb{Z})\times H^2(T,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^4(T,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$$

はこの基底によって

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表示される．このとき $\mathbb{P}^5$ の斉次座標を $(x_1:x_2:\cdots:x_6)$ と記し，

$$\check{D}=\{(x_1:\cdots:x_6)\in\mathbb{P}^5 \mid x_1x_6-x_2x_5+x_3x_4=0\}$$
$$D=\{(x_1:\cdots:x_6)\in\check{D}\mid \mathrm{Re}(x_1\overline{x_6})-\mathrm{Re}(x_2\overline{x_5})+\mathrm{Re}(x_3\overline{x_4})>0\}$$

とおく．D は重さ 2 の偏極 Hodge 構造の周期領域ではない(原始的コホモロジーを考えていないので上の Q は $H^{1,1}(T,\mathbb{C})$ 上では不定符号になる(Hodge 符号定理(例 3.16))ので偏極を与えない)が，周期行列と類似の性質をもつ．ここでは便宜的にこの D も周期領域と呼ぶことにする．偏極構造を考えた場合の周期領域は $\mathbb{P}^5$ の超平面による D の切り口として D の 3 次元閉部分多様体として実現できる．2 次元複素トーラス T の正則 2 次微分型式として $\omega=dz_1\wedge dz_2$ をとると複素トーラス T に対応する周期領域の点は

$$\left(\int_{f_1}\omega,\int_{f_2}\omega,\cdots,\int_{f_6}\omega\right)=(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21}:-\tau_{12}:\tau_{11}:-\tau_{22}:\tau_{21}:1)$$

で与えられる．さて 2 次元複素トーラスの同型類のなす集合を $\mathfrak{M}$ と記すと，各複素トーラスに周期領域 D の点を上のように対応させることによって周期写像

$$p\colon \mathfrak{M}\longrightarrow G_{\mathbb{Z}}\backslash D \tag{3.27}$$

が定義できる．ここで

$$G_{\mathbb{Z}}=\{M\in GL(2g,\mathbb{Z})\mid {}^tMQM=0\}$$

である．$\mathfrak{M}$ は複素解析空間の構造をもたないので p は単に集合としての写像であるが，$\mathfrak{M}$ に含まれる偏極 Abel 曲面のモジュライ空間に p を制限すれば p は正則写像である．さて

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

とおくと $M\in G_{\mathbb{Z}}$ である．この M によって D の点

$$(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21}:-\tau_{12}:\tau_{11}:-\tau_{22}:\tau_{21}:1)$$

は D の点

$$(\tau_{11}\tau_{22}-\tau_{12}\tau_{21}:-\tau_{21}:\tau_{11}:-\tau_{22}:\tau_{12}:1)$$

に移される．周期行列 $\begin{pmatrix}\tau\\I_2\end{pmatrix}$ をもつ複素トーラス T に対して周期行列 $\begin{pmatrix}{}^t\tau\\I_2\end{pmatrix}$ をもつ複素トーラスは T の Picard 多様体 $\mathrm{Pic}(T)$ である(命題 2.3)．したがって周期写像 p (3.27)では

$$p(T)=p(\mathrm{Pic}(T))$$

となる．一般に T と $\mathrm{Pic}(T)$ とは同型でないので周期写像 p は単射ではない．周期写像 p は一般には 2 対 1 の写像で $p^{-1}(p(T))=\{T,\mathrm{Pic}(T)\}$ であることが知られている(Shioda [82])．

また，$M\in G_{\mathbb{Z}}$ は $H^1(T,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック変換から引き起こされる $H^2(T,\mathbb{Z})$ の同型ではないことが分かる． □

Clemens と Griffiths は，$\mathbb{P}^4$ の 3 次超曲面 X に対して中間 Jacobi 多様体 $J(X)$ を対応させる写像の単射性を示した．これはコホモロジー $H^3(X)$ の偏極 Hodge 構造による周期写像に他ならない．Hodge 数は，$h^{3,0}=0$, $h^{2,1}=5$ である．Abel 多様体 $J(X)$ の偏極を詳しくみることにより $J(X)$ は曲線の Jacobi 多様体ではなく，X は単有理(unirational)だが有理的(rational)ではないことが示されている．

この例のように，奇数$(2m-1)$次元の多様体で Hodge 数が $h^{m,m-1}=h^{m-1,m}$ 以外は 0 のものについて，大域的 Torelli 問題は肯定的である可能性がある．次はその一例である．

例 3.38　$Q_i\subset\mathbb{P}^{2g+1}$ $(i=0,1)$ を一般の(generic) 2 次超曲面として，$X=$

$Q_0 \cap Q_1$ とおく．このとき，X の Hodge 構造 $H^{2g-1}(X,\mathbb{Z})$ は $(g,g-1),(g-1,g)$ 型の成分しかもたず，これから決まる中間 Jacobi 多様体 $J(X)$ は g 次元の(主偏極)Abel 多様体となる．

X に対する大域的 Torelli 問題は肯定的である．証明の概略は次の通りである．曲線の Torelli の定理により，$J(X)$ から決まる曲線 C の標準写像 $\phi_{|K|}\colon C \to \mathbb{P}^{g-1}$ は $\mathbb{P}^1$ を経由する．その $C \to \mathbb{P}^1$ の分岐点を $(\lambda_0 : -1), \cdots, (\lambda_{2g+1} : -1) \in \mathbb{P}^1$ とするとき，$Q_0 = \left\{ \sum_{i=0}^{2g+1} x_i^2 \right\}$，$Q_1 = \left\{ \sum_{i=0}^{2g+1} \lambda_i x_i^2 \right\}$ とおくと $Q_0 \cap Q_1$ として X は回復されるからである(M. Reid)．　□

次に，大域的 Torelli 問題が否定的な例に目を向ける．最初に注意すべきは，$p_g = q = 0$ なる単連結な代数曲面でモジュライが次元をもつものが R. Barlow により構成されていることである．Hodge 構造は完全に自明である．この曲面は Castelnuovo の有理性の判定条件 $P_2 = q = 0$ を満たさない一連の代数曲面の一つである．これらの曲面については，Barth–Peters–Van de Ven [7] 参照．

また，無限小 Torelli 問題の反例として Todorov, Catanese が構成した一般型の代数曲面は周期写像の次数が 2 以上であることが分かり，やはり(弱)大域的 Torelli 問題が否定的な例である．

今度は弱大域的 Torelli 問題をみてみよう．

最初に閉 Riemann 面 C の場合だが，種数 g が $\geqq 5$ で一般の[*7] C に対しては，標準写像 $\phi_{|K|}\colon C \to \mathbb{P}^{g-1}$ の像は，

$$\phi_{|K|}(C) = \bigcap_{Q \in \mathcal{Q}} Q$$

で与えられる(Babbage–Enriques–Petri の定理)．ここで，$\mathcal{Q}$ は

$$\delta^*\colon Sym^2 H^0(C, K_C) \longrightarrow H^0(C, K_C^{\otimes 2})$$

の核 $\mathrm{Ker}(\delta^*)$ であり，$\mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}(H^0(C, K_C)^*)$ の 2 次超曲面の線型系と見なせる．この δ^* は無限小 Torelli 問題のところで出てきた写像である．それは周期写像の接写像から得られたことに注意しよう．

*7　超楕円的でも，3 重的(trigonal)でも，平面 5 次曲線でもないということ．

これから，種数 g が $\geqq 5$ のときは，周期写像

$$p\colon \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g$$

に対する弱大域的 Torelli 定理が成り立つことが分かる.

これを動機の一つとして，Hodge 構造の無限小変形(IVHS)という概念が導入された.

定義 3.39　重さ w の **Hodge 構造の無限小変形**(infinitesimal variation)とは，偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造 $(H_{\mathbb{Z}}, F, Q)$ と $\mathbb{C}$ ベクトル空間 T，および，線型写像

$$\delta = (\delta_p)\colon T \longrightarrow \bigoplus_{1 \leqq p \leqq w} \mathrm{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$

からなる五つ組 $(H_{\mathbb{Z}}, F, Q; T, \delta)$ で，次の条件を満たすものである.

(I.1)　$\delta_{p-1}(\xi)\delta_p(\eta) = \delta_{p-1}(\eta)\delta_p(\xi), \quad \xi, \eta \in T$

(I.2)　$Q(\delta_p(\xi)u, v) + Q(u, \delta_{q+1}(\xi)v) = 0, \quad u \in H^{p,q},\ v \in H^{q+1,p-1}$　□

滑らかな射影射 $f\colon \mathfrak{X} \to S$ に付随する重さ w の偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造の変形 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = R^w_{\mathrm{prim}} f_* \mathbb{Z}$ の場合，各点 $s \in S$ に対し偏極 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造 $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(s)$ を考え，$T = T_s S$ とおき

$$\delta = dp_s\colon T_s S \longrightarrow \bigoplus_{1 \leqq p \leqq w} \mathrm{Hom}(H^{p,q}, H^{p-1,q+1})$$

とすると Hodge 構造の無限小変形が得られる.

曲線のモジュライ空間 $\mathcal{M}_g$ の接空間は $H^1(C, T_C) \simeq H^0(C, K_C^{\otimes 2})^*$ で計算できるので，種数 g が $\geqq 5$ の弱大域的 Torelli 定理の証明には Hodge 構造の無限小変形が現れている.

Hodge 構造の無限小変形は，多くの弱大域的 Torelli 定理の証明の基本的手段となった. その成功の典型的な例として，射影空間の超曲面に対する次の Donagi の定理がある.

定理 3.40 (Donagi の定理)　自然数の組 (d, n) について，$d=3$, $n=2$; $d=4$, $n=4m$ $(m \geqq 1)$; $d=6$, $n=6m+1$ $(m \geqq 1)$ の場合を除き，かつ，d は $n+2$ を割り切らないとする. 射影空間 $\mathbb{P}^{n+1}$ の d 次超曲面に対して弱大域的 Torelli 定理が成り立つ.　□

証明は Donagi [25] を参照.

射影空間の超曲面 X のコホモロジーは Jacobi 環 $R=\bigoplus_{k\geqq 0}R^k$ により記述できる(例 3.4). また自然な同型 $R^d\simeq H^1(X,T_X)$ があり, カップ積と縮約による積

$$H^1(X,T_X)\times H^{p,n-p}_{\mathrm{prim}}(X)\longrightarrow H^{p-1,n-p+1}_{\mathrm{prim}}(X)$$

は Jacobi 環の積

$$R^d\times R^{t_p}\longrightarrow R^{t_p-1}\quad (t_p=d(n-p+1)-(n+2))$$

と対応することが分かる.

次の事実により X の Jacobi イデアル J が回復できれば X が回復できる.

命題 3.41　滑らかな X の次数 $d-1$ の Jacobi イデアルの成分 J^{d-1} から射影変換を除き X は一意に決まる.

[証明]　X の定義多項式を f とするとき X の Jacobi イデアルを $J=J(f)$ と記そう. 簡単のため, X は自己同型をもたないと仮定する. すると幾何学的不変式論により, $f\in S^d$ の(定数倍を除いて考えた)近傍 $U\subset\mathbb{P}(V)$ $(V=H^0(\mathbb{P}^{n+1},\mathcal{O}(1)))$ の商 $U/PGL(V)$ が存在して滑らかである. $\pi\colon U\to U/PGL(V)$ を自然な射影とする.

$g\in U$, $A=(a_{ij})\in\mathrm{Lie}(GL(V))$ に対して

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} g(e^{tA}x)=\sum_{i,j}\frac{\partial g}{\partial x_i}a_{ij}x_j$$

である. したがって, π のファイバー $\pi^{-1}(\pi(g))$ の接空間は $J(g)^d$ であることが分かる.

d 次斉次多項式 $f_0,f_1\in U$ が $J(f_0)^{d-1}=J(f_1)^{d-1}$ を満たすとする. すると $J(f_0)^d=J(f_1)^d$ である. $f_t=(1-t)f_0+tf_1$ を考えると,

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}=-f_0+f_1$$

であり, Euler の公式により $f_0\in J(f_0)^d$, $f_1\in J(f_1)^d$ である. また, $J(f_0)^d=J(f_t)^d=J(f_1)^d$ であるから $\dfrac{\partial f_t}{\partial t}\in J(f_t)^d$ となり, f_t が π のファイバーに属することが分かる. すなわち, すべての f_t が, 特に f_0 と f_1 は射影変換で移り

あう. ∎

Donagi の定理は超曲面 X の Hodge 構造の無限小変形から X の Jacobi イデアル J が回復できることを主張する. そのために, Donagi は対称子(symmetrizer)補題と呼ばれる技法を開発している. この手法は重み付き射影空間の超曲面等に拡張されている.

例 3.42 射影空間 $\mathbb{P}^{3m+1}$ の 3 次超曲面 X の場合 $(m \geqq 1)$.

$t_{2m}=1$ ゆえ

$$H^{2m,m}(X) \simeq V$$

であり, $J(f)^2 = \mathrm{Ker}(\delta^{m*})$ である. ここで

$$\delta^m\colon\ S^m H^1(X,T_X) \longrightarrow S^2(V^*) \subset \mathrm{Hom}(H^{2m,m}(X), H^{m,2m}(X))$$

は δ を m 回繰り返し合成したものである. これから, X の定義方程式が Hodge 構造の無限小変形から回復できることが分かる. □

最後に, 曲線の場合の Prym 多様体に関する結果を紹介してみよう.

$\eta\colon \widetilde{C} \to C$ を種数 g の閉 Riemann 面 C の 2 重不分岐被覆とする. 順像 $\eta_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$ の被覆変換群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ での分解を $\mathcal{O}\oplus\mathcal{L}$ とすると, $\mathcal{L}\in J(C)$, $\mathcal{L}^{\otimes 2}\cong\mathcal{O}$ であることが分かる. これから, 種数 g の閉 Riemann 面 C の 2 重不分岐被覆と Jacobi 多様体 $J(C)$ の 2 等分点との 1 対 1 対応が導かれる.

また, Albanese 多様体の普遍性から導かれる準同型

$$\eta_*\colon J(\widetilde{C}) \longrightarrow J(C)$$

の核(kernel)の単位元の連結成分を $\mathrm{Prym}(\eta)$ と記し, 2 重不分岐被覆の **Prym 多様体**と呼ぶ. これには, 主偏極 Abel 多様体の構造が入る. $g(\widetilde{C}) = 2g-1$ ゆえ, $\dim \mathrm{Prym}(\eta) = g-1$ である.

さて, $\mathcal{R}_g$ を種数 g の閉 Riemann 面の 2 重不分岐被覆のなすモジュライ空間とする. **Prym 写像**とは

$$\begin{array}{rccc} p_g\colon & \mathcal{R}_g & \longrightarrow & \mathcal{A}_{g-1} \\ & \eta & \longmapsto & \mathrm{Prym}(\eta) \end{array}$$

のことである. $g \leqq 5$ のとき,

$$\dim \mathcal{A}_{g-1} = \frac{1}{2}g(g-1) < 3g-3 = \dim \mathcal{R}_g$$

であることが Wirtinger により指摘されていて，Prym 写像のファイバーは次元をもち，Torelli の定理の類似は成り立たない．Mumford は，C が超楕円曲線のとき $p_g^{-1}(p_g(\eta))$ が次元をもつことを示した．

一方 Prym 写像に対しては，$g \geqq 7$ のとき弱大域的 Torelli 定理が成り立つ(Kanev, Donagi)．また，$g=6$ のときは一般ファイバーは 27 点からなることが示されている(Donagi–Smith)．

§3.3　周期写像と混合 Hodge 構造

周期写像の理論では射影多様体の滑らかな族 $f: \mathfrak{X} \to S$ に対して S から周期領域 D への(正確には周期領域 D を不連続群 Γ で割った商空間 $\Gamma \backslash D$ を考える必要がある)写像 $p: S \to D$ を考察する．一般には滑らかな射影多様体の族はコンパクト化 $\overline{f}: \overline{\mathfrak{X}} \to \overline{S}$ へ拡張可能であることが多く，特に重要なのは $\overline{S} \setminus S$ が余次元 1 の部分多様体になる場合である．このとき周期写像が $\overline{S} \setminus S$ へ近づくときの挙動が問題となる．一方，射影多様体の族の方では点が $\overline{S} \setminus S$ へ近づくとき $X_s = p^{-1}(s)$ の退化を考えることになる．

代数多様体の族の境界に現れる退化した多様体はもはや通常の Hodge 構造をもたず，Hodge 構造を一般化した混合 Hodge 構造が現れる．このようなコンパクトとも滑らかとも限らない代数多様体のコホモロジーを扱うのが Deligne の混合 Hodge 構造の理論である．ここでは述べないが，それはコホモロジーを通して代数多様体の周期の数論的な性質を研究するための基本的な道具である．

一方，周期写像の観点からは周期写像が境界の点に近づくときの挙動はべき零軌道定理，SL_2 軌道定理として定式化できる(Schmid)．さらにこれから Hodge 構造の極限としての混合 Hodge 構造の存在が導かれる．代数多様体の(半安定)退化の場合の極限としての混合 Hodge 構造は，幾何学的に直接構成することもできる(Steenbrink)．

この両者の見方の関係は Clemens–Schmid 完全列により記述されて，(半安定)退化の幾何学に，さらには周期写像の研究に応用がある.

(a)　混合 Hodge 構造

混合 Hodge 構造の定義の動機付けをするために，Deligne が導入した混合 Hodge 構造が機能する基本的な状況を考えてみよう．X を非特異射影代数多様体，D をその部分多様体としよう．対 (X,D) の長完全列

$$H^{k-1}(D,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^k(X\setminus D,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(D,\mathbb{Z})$$

において，$H^k(X,\mathbb{Z})$ は重さ k の Hodge 構造をもつ．D が非特異と仮定すると，$H^{k-1}(D,\mathbb{Z})$ は重さ $k-1$ の Hodge 構造をもつ．したがって開多様体 $X\setminus D$ のコホモロジー $H_c^k(X\setminus D,\mathbb{Z})$ は，重さ k の Hodge 構造の重さ $k-1$ の Hodge 構造による拡大となっている．たとえば射影多様体 X の(一般)超平面切断 D を考えるとこの状況は生ずる．Griffiths が射影空間の超曲面の周期を計算した状況がまさしくこれであった.

結論として，コンパクトでない準射影的な多様体，さらには非特異性も仮定しない多様体のコホモロジーを考察するときには，Hodge 構造の拡大(の繰り返し)を考える必要がある.

さて混合 Hodge 構造の定義に取り掛かろう.

定義 3.43　A を $\mathbb{R}$ の部分環とする．**混合 A-Hodge 構造**とは，組 $H=(H_A,W,F)$ であって，次の条件を満たすものをいう.

(0)　H_A は有限生成 A 加群であり，$W=\{W_w\}_w$ は $H_{\mathbb{Q}(A)}=H_A\otimes\mathbb{Q}(A)$ ($\mathbb{Q}(A)$ は A の商体)の有限な増加フィルターである.

(1)　$F=\{F^p\}_p$ は $H_{\mathbb{C}}=H_A\otimes_A\mathbb{C}$ の有限な減少フィルターであり，次が成り立つ：$p+q\neq w$ のとき

$$\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q\,\mathrm{Gr}_w^W H_{\mathbb{C}}=0$$

ここで W は係数拡大により $H_{\mathbb{C}}$ の上に誘導された増加フィルター，$\overline{F}$ は H_A に関する F の複素共役を表す.　□

W を**重みフィルター**(weight filtration)と呼ぶ.

重要な注意として，一般には

$$\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q\,\mathrm{Gr}_w^W\,H_{\mathbb{C}} \not\simeq \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q\,\mathrm{Gr}_w^W\,\mathrm{Gr}_F^p\,H_{\mathbb{C}}$$

である．一方 Zassenhaus の補題により

$$\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q\,\mathrm{Gr}_w^W\,H_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{Gr}_{\overline{F}}^q\,\mathrm{Gr}_F^p\,\mathrm{Gr}_w^W\,H_{\mathbb{C}}$$

である．

上の条件(1)では F と $\overline{F}$ は $\mathrm{Gr}_w^W\,H_{\mathbb{C}}$ の上に誘導されたフィルターを考えている．そして上の定義は $(\mathrm{Gr}_w^W\,H_{\mathbb{Q}(A)}, F\,\mathrm{Gr}_w^W\,H_{\mathbb{C}})$ が重さ w の $\mathbb{Q}(A)$-Hodge 構造であることを意味する．この Hodge 構造をしばしば $\mathrm{Gr}_w^W\,H$ と記す．

H_A が捻れ部分群をもたないときは H_A 上に増加フィルター W を考えることができる．そのときは $\mathrm{Gr}_w^W\,H$ は A-Hodge 構造をもつ．

定義 3.44　混合 Hodge 構造 $H=(H_A, W, F)$ が**偏極可能**(graded-polarizable)とは，各 $\mathrm{Gr}_w^W\,H$ $(\forall w)$ が偏極可能であることである．

混合 Hodge 構造の偏極とは，各 $\mathrm{Gr}_w^W\,H$ の上の偏極 S_w の集まり $S=\{S_w\}$ をいう．□

$H=(H_A, F)$ を重さ k の A-Hodge 構造とする．このとき

$$W_w H_{\mathbb{Q}(A)} = \begin{cases} H_{\mathbb{Q}(A)}, & w \geqq k \\ 0, & w < k \end{cases}$$

とおくと (H_A, W, F) は混合 A-Hodge 構造である．このような混合 A-Hodge 構造は**純な**(pure)構造と呼ばれる．また $H=(H_A, W, F)$，$H'=(H'_A, W, F)$ を混合 A-Hodge 構造とするとき，純な Hodge 構造のときと同様に，$H_{\mathbb{C}}\oplus H'_{\mathbb{C}}$, $H_{\mathbb{C}}\otimes H'_{\mathbb{C}}$, $\mathrm{Hom}(H_{\mathbb{C}}, H'_{\mathbb{C}})$ の上にフィルター F を定義して，フィルター W も同様に定義すれば混合 A-Hodge 構造が定まる．それぞれ，$H\oplus H'$, $H\otimes H'$, $\mathrm{Hom}(H, H')$ と記す．

次に混合 Hodge 構造の間の射(morphism)を定義しておこう．

定義 3.45　$H=(H_A, W, F)$，$H'=(H'_A, W, F)$ を混合 A-Hodge 構造とする．$f=(f_A, f_{\mathbb{Q}(A)}, f_{\mathbb{C}})\colon H\to H'$ が H から H' への射であるとは，$f_A\colon H_A\to H'_A$ が A 加群の射であって，$f_{\mathbb{Q}(A)}=f_A\otimes_A\mathbb{Q}(A)\colon H_{\mathbb{Q}(A)}\to H'_{\mathbb{Q}(A)}$ がフィルター W と両立し，$f_{\mathbb{C}}=f_A\otimes_A\mathbb{C}\colon H_{\mathbb{C}}\to H'_{\mathbb{C}}$ がフィルター F と(したがって $\overline{F}$ と

も)両立する，すなわち，

$$f_{\mathbb{Q}(A)}(W_w H_{\mathbb{Q}(A)}) \subset W_w H'_{\mathbb{Q}(A)}, \quad f_{\mathbb{C}}(F^p H_{\mathbb{C}}) \subset F^p H'_{\mathbb{C}}$$

が成り立つものをいう． □

混合 Hodge 構造の圏を (A-MHS) と記す．(A-MHS) に対して次の定理が成り立つ．

定理 3.46

（1） (A-MHS) は Abel 圏である．

（2） 任意の射はフィルター F, W と強い意味で両立する(strictly compatible)．

（3） $\mathrm{Gr}^W_w, \mathrm{Gr}^p_F$ は完全函手である．

[証明] 証明の鍵は，フィルター $W, F, \overline{F}$ の標準的な分裂(splitting)の構成にある．

簡単のため A を体としよう．(H_A, F, W) を混合 Hodge 構造とする．以下で，$H = H_{\mathbb{C}}$，$W_n = W_n H_{\mathbb{C}}$ 等の略記をする．

$$H_F^{p,q} = W_{p+q} \cap F^p \cap \left(W_{p+q} \cap \overline{F}^q + \sum_{i \geqq 1} W_{p+q-i} \cap \overline{F}^{q-i+1} \right)$$

とおく．$\overline{F}$ に対しても F と $\overline{F}$ の役割を入れ替えて定義する．

$$H_{\overline{F}}^{p,q} = W_{p+q} \cap \overline{F}^q \cap \left(W_{p+q} \cap F^p + \sum_{i \geqq 0} W_{p+q-i} \cap F^{p-i+1} \right)$$

以下，$p+q=n$ とする．

補題 3.47 標準的な射影 $W_n H \to \mathrm{Gr}^W_n H$ は同型

$$H_F^{p,q} \simeq H^{p,q} = (F^p \cap \overline{F}^q)\, \mathrm{Gr}^W_n H$$

を誘導する． □

この系として次は容易に確かめられる．

系 3.48

$$W_n = \sum_{p+q \leqq n} H_F^{p,q} = \sum_{p+q \leqq n} H_{\overline{F}}^{p,q},$$

$$F^p = \sum_{r \geqq p} H_F^{r,s}, \quad \overline{F}^q = \sum_{s \geqq q} H_{\overline{F}}^{r,s}.$$

［証明］　$i\colon H_F:=\bigoplus_{p,q} H_F^{p,q}\to H$ を考える．H_F には右辺の $\sum$ を $\bigoplus$ に置き換えた式で定義されるフィルター W,F を考える．すると，$\mathrm{Gr}^W(i)$ は同型である．増大フィルターの小さい方から帰納的に $i\colon W_nH_F\simeq W_nH$ が分かる．特に，i も同型である．

また，$\mathrm{Gr}_F\,\mathrm{Gr}^W(i)=\mathrm{Gr}^W\,\mathrm{Gr}_F(i)$ が同型なので $\mathrm{Gr}_F(i)$ も同型である．F に対しても W と同様に示せる． ∎

［補題の証明］　$k\geqq 1$ に関する帰納法で次の主張を証明しよう．

$(*)_k$　標準的な射影 $W_n/W_{n-k}\to \mathrm{Gr}_n^W H$ は同型

$$\left\{(W_n\cap F^p+W_{n-k})\cap(W_n\cap \overline{F}^q+\sum_{k>i\geqq 1}W_{n-i}\cap\overline{F}^{q-i+1}+W_{n-k})\right\}/W_{n-k}$$

$$\simeq H^{p,q}=(F^p\cap\overline{F}^q)\,\mathrm{Gr}_n^W H$$

を誘導する．

$k=1$ のときは $H^{p,q}=(F^p\cap\overline{F}^q)\,\mathrm{Gr}_n^W H$ の定義に他ならないので，$k\geqq 2$ としよう．$(*)_{k-1}$ を仮定して，$(*)_k$ を示そう．このとき，次の副補題が適用できることをいおう．

副補題　ベクトル空間 B,B',C,C' に対し，$E=B'\cap C'$，$D=B'+C'$ とおく．これらが

$$B\cap D\subset B',\quad C\cap D\subset C'$$

を満たしているとする．このとき，次の自然な同型が存在する．

$$\{(B+B')\cap(C+C')\}/E\simeq\{(B+D)\cap(C+D)\}/D$$ □

今，

$$B=W_n\cap F^p$$
$$B'=W_{n-k+1}\cap F^p+W_{n-k}$$
$$C=W_n\cap\overline{F}^q+\sum_{k-1>i\geqq 1}W_{n-i}\cap\overline{F}^{q-i+1}$$
$$C'=W_{n-k+1}\cap\overline{F}^{q-k+2}+W_{n-k}$$

とおくとき，

$$D=W_{n-k+1},\quad E=W_{n-k}$$

となることを示そう．これを認めると，副補題の仮定が満たされることは明

らかである．実際，$B\cap D\subset F^p\cap W_{n-k+1}\subset B'$ であり，もう一つの式も同様である．

さて，Gr^W_{n-k+1} 上のフィルター $F, \overline{F}$ の満たす条件

$$\mathrm{Gr}^W_{n-k+1}=F^p\,\mathrm{Gr}^W_{n-k+1}\oplus\overline{F}^{q-k+2}\,\mathrm{Gr}^W_{n-k+1}$$

を書き下してみると，

$$(W_{n-k+1}\cap F^p+W_{n-k})\cap(W_{n-k+1}\cap\overline{F}^{q-k+2}+W_{n-k})=W_{n-k+1}$$

$$(W_{n-k+1}\cap F^p+W_{n-k})+(W_{n-k+1}\cap\overline{F}^{q-k+2}+W_{n-k})=W_{n-k}$$

となる．これは示したかった式に他ならない． ∎

問 4

(1) X, Y, Z をベクトル空間 V の部分ベクトル空間とする．$X\supset Z$ のとき，$(X\cap Y)+Z=X\cap(Y+Z)$ を示せ．

(2) 上の副補題の全射性を示せ．

(3) 上の副補題の単射性を示せ．

さて，定理の証明に取り掛かる．補題により，圏 (A-MHS) の射 $f\colon H\to H'$ に対し，

$$f(H_F^{p,q})\subset(H')_F^{p,q}$$

である．これより，$f(H_F^{p,q})=f(H)\cap(H')_F^{p,q}$ が成り立つ．したがって，f が W, F と強い意味で両立することは明らかである．

$\overline{F}$ に対しても $H_{\overline{F}}^{p,q}$ を考えれば，強い意味での両立性は明らかである．

次に，f の核，余核の存在をいう．$\mathrm{Ker}(f_G)$ $(G=A$ または $\mathbb{C})$（または $\mathrm{Coker}(f_G)$）に W と F を誘導したフィルター付きの対象を $K=\mathrm{Ker}(f)$（または $C=\mathrm{Coker}(f)$）と記す．たとえば，$W_nK=K\cap W_nH$ である．

すると，包含写像 $K\hookrightarrow H$ は単射 $\mathrm{Gr}^W K\hookrightarrow\mathrm{Gr}^W H$ を誘導する．そして，FK が $\mathrm{Gr}^W K$ の上に誘導するフィルター F と $F\,\mathrm{Gr}^W H$ が $\mathrm{Gr}^W K$ の上に誘導するフィルター F とは一致する．したがって，

$$\mathrm{Gr}_n^W K = \bigoplus_{p+q=n} (\mathrm{Gr}_n^W K \cap H^{p,q})$$

を得る．これで，$K=\mathrm{Ker}(f)$ が A-混合 Hodge 構造であることが示された．$C=\mathrm{Coker}(f)$ についても同様．

Abel 圏の条件 $\mathrm{Coim}(f)\simeq \mathrm{Im}(f)$ については，$\mathrm{Gr}^W \mathrm{Coim}(f)\simeq \mathrm{Gr}^W \mathrm{Im}(f)$ の各 (p,q) 成分が同型であることから (A-MHS) での同型性が従う．

フィルター W,F と射との強い意味での両立性から，$\mathrm{Gr}_w^W, \mathrm{Gr}_F^p$ が完全函手であることがすぐに従う．これで，定理の証明が終わる．∎

問5　混合 Hodge 構造 $H=(H_A,W,F)$ において，$H=W_n\supset W_{n-1}\supset W_{n-2}=0$ であるとする．このとき，完全列

$$0 \longrightarrow W_{n-1} \longrightarrow W_n \longrightarrow \mathrm{Gr}_n^W \longrightarrow 0$$

は圏 (A-MHS) において分裂することを示せ．

注意 3.49　圏 (A-MHS) は Abel 圏であるが，自明でない射影対象(projective object)も移入対象(injective object)も存在しないことが知られている．

開多様体の混合 Hodge 構造

さて Deligne の Hodge 理論の基本定理，すなわち代数多様体のコホモロジーの混合 Hodge 構造の構成を紹介しよう．

ここでは滑らかな代数多様体に話を限る．任意の代数多様体でも混合 Hodge 構造の構成はできるが，単体的(simplicial)方法，あるいは立体的(cubic)方法といった技術的な準備が必要であるのでそちらは原論文にゆずる．

まず基本設定として永田の埋め込み定理により，X を固有で滑らかな代数多様体 $\overline{X}$ に埋め込むことができる．さらに広中の特異点解消定理により，$D:=\overline{X}\setminus X$ は正規交叉(をもつ)因子(divisor with normal crossings)であると仮定することができる．$d=\dim X$ とおく．また，$j\colon X\hookrightarrow \overline{X}$ を自然な包含写像とする．

正規交叉因子とは，D の各点の近傍で適当な X の座標系 $t_1,\cdots,t_d$ が存在

して，(局所的に)$D=\{t_1\cdots t_m=0\}$ と表せる因子[*8]をいう．正規交叉因子の既約成分は必ずしも滑らかとは限らない．

$\mathcal{I}_D$ を D のイデアル層として，

$$\Omega_X^1(\log D):=\{\alpha\in j_*\Omega_X^1 \mid \mathcal{I}_D\alpha, \mathcal{I}_D d'\alpha\subset\Omega_X^1\}$$

とおき，その切断を D に沿って対数的な 1 次微分型式と呼ぶ．この条件は α が D に沿って高々 1 位の極をもつということである．

D に沿って**対数的な p 次微分型式**(logarithmic differential form of degree p)の層を

$$\Omega_X^p(\log D):=\bigwedge^p\Omega_X^1(\log D)$$

と定義する．$\Omega_X^p(\log D)$ の元 α は局所的に

$$\beta\wedge\frac{d't_{i_1}}{t_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{d't_{i_k}}{t_{i_k}},\quad \beta\in\Omega_X^{p-k}$$

と表せる．

$\Omega_X^p(\log D)$ のフィルター W を

$$W_k\Omega_X^p(\log D):=\Omega_X^{p-k}\wedge\Omega_X^k(\log D)$$

と定義する．これが後に $H^w(X,\mathbb{C})$ に重みフィルターを定義するものである．

対数的微分型式は **Poincaré 留数**(residue)により，計算できて扱いやすいものとなっている．局所座標系 $t_1,\cdots,t_d$ に関する $\{t_i=0\}$ と表せる D の既約成分を D_i と記す．$I\subset\{1,\cdots,d\}$ に対し，$D_I:=\bigcap_{i\in I}D_i$ とおく．すると，対応

$$\beta\wedge\frac{d't_{i_1}}{t_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{d't_{i_k}}{t_{i_k}}\longmapsto\beta_{D_I}$$

は局所的に準同型 $\mathrm{Res}_{D_I}\colon W_k\Omega_X^p(\log D)\to\Omega_{D_I}^{p-k}$ を定める．これが大域的に意味をもつためには，D の順序付けの(向きの，ともいう)局所定数層 $\epsilon^k=\epsilon_{D_I}^k$ を導入する必要がある．$k\geqq 1$ に対し，

$$D^k=\bigcup_{|I|=k}D_I,\quad \widetilde{D}^k=\coprod_{|I|=k}D_I$$

---

*8　このように表せる因子を強い意味で正規交叉をもつ因子(divisor with simple normal crossings)と呼び，正規交叉因子は局所的に $D=\{t_1^{m_1}\cdots t_k^{m_k}=0\}$ $(m_i\in\mathbb{N})$ と表せる因子を指すことも多い．

は X の局所座標の(順序も含めた)選び方によらず，大域的に意味をもつ. $D^0=\widetilde{D}^0=\overline{X}$, $\widetilde{D}=\widetilde{D}^1$ とおく. D_I に対し，D_i $(i\in I)$ の順序は $\widetilde{D}^k$ の上でモノドロミーをもつかもしれない. $\widetilde{D}^k$ の十分小さな開集合 U ごとに，そこに現れる既約成分の集合を $E(U)$ とするとき，$U\mapsto\bigwedge^k\mathbb{C}^{E(U)}$ は $\widetilde{D}^k$ 上の1次元の局所系 ϵ^k を与える.

$\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$ を選び(代数的には2通りある！)，$\epsilon^k_{\mathbb{Z}}(U)=\bigwedge^k((2\pi\sqrt{-1})^{-1}\mathbb{Z})^{E(U)}$ とおき，$\mathbb{Z}$ 加群の局所系 $\epsilon^k_{\mathbb{Z}}$ を得る. $(\epsilon^k_{\mathbb{Z}},\epsilon^k)$ は Tate の Hodge 構造 $\mathbb{Z}(-k)$ のなす局所系である.

$i_k\colon\widetilde{D}^k\to\overline{X}$ を自然な写像として，$\epsilon^k_{\overline{X}}:=i_{n*}\epsilon^k$, $(\epsilon^k_{\overline{X}})_{\mathbb{Z}}:=i_{n*}\epsilon^k_{\mathbb{Z}}$ とおく. すると対応

$$\beta\wedge\frac{d't_{i_1}}{t_{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{d't_{i_k}}{t_{i_k}}\longmapsto\beta_{D_I}\otimes(\text{I の順序})$$

が定める準同型

$$\mathrm{Res}_{\widetilde{D}^k}\colon W_k\Omega^p_{\overline{X}}(\log D)\longrightarrow i_{n*}(\Omega^{p-k}_{\widetilde{D}^k}\otimes\epsilon^k)$$

は大域的に意味をもち，次が成り立つ.

命題 3.50　$\mathrm{Res}_{\widetilde{D}^k}$ は次の複体の同型を誘導する.

$$\mathrm{Gr}^W_k\,\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)\longrightarrow i_{n*}(\Omega^\bullet_{\widetilde{D}^k}\otimes\epsilon^k)[-k]\qquad\square$$

これは局所的な問題で直接的な計算によるが，証明は Deligne [19] にゆずる.

$\widetilde{D}^k$ は固有で滑らかなので，古典的な Hodge 理論が使えて $\mathbb{C}_{\widetilde{D}^k}\simeq\Omega^\bullet_{\widetilde{D}^k}$ であり，準同値(quasi-isomorphism)

$$\mathrm{Res}\colon\ \mathrm{Gr}^W_k\,\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)\simeq\epsilon^k_{\overline{X}}[-k]$$

が得られる.

Deligne の基本定理を述べるために，対数的微分型式の複体上に Hodge フィルター F を定義しておこう.

$$F^p\Omega^\bullet_{\overline{x}}(\log D):=\Omega_{\overline{X}}^{\bullet\geqq p}(\log D)$$

これは対数的極があることを除けば，通常の Hodge フィルター F の定義と同じやり方である.（これを馬鹿げたフィルター(stupid filtration)という.）特に，部分複体 $\Omega_{\overline{X}}$ に誘導するフィルターは通常の Hodge フィルター F に

一致する．

定理 3.51（Deligne，1971）　非特異代数多様体 X の特異コホモロジーについて次が成り立つ．

（i）　$(H^n(X,\mathbb{Z}),W[n],F)$ は混合 $\mathbb{Z}$-Hodge 構造である．そして，$k<n$ に対しては $\mathrm{Gr}_k^{W[n]}H^n(X,\mathbb{Z})=0$ である．

（ii）　スペクトル系列

$$ {}_WE_1^{-k,k+n}=H^{n-k}(\widetilde{D}^k,\epsilon^k)\Longrightarrow H^n(X,\mathbb{C}) $$

は E_2 項で退化する．

（iii）　$(H^n(X,\mathbb{Z}),W[n],F)$ の混合 Hodge 構造[*9]は X について函手的 (functorial) であり，$\overline{X}$ や $K^\bullet$ のとり方に依存しない．特に，滑らかな代数多様体の間の射 $f\colon X\to Y$ に対して，$f^*\colon H^n(Y,\mathbb{Z})\to H^n(X,\mathbb{Z})$ は混合 Hodge 構造の射である．□

証明の核心は $\mathrm{Gr}_k^W H^n(X,\mathbb{C})$ の上のフィルター F が Hodge 分解を与えることを示すことである．定義により W に対するスペクトル系列

$$ {}_WE_1^{p,q}=H^{p+q}(\overline{X},\,\mathrm{Gr}_{-p}^W\Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D))\simeq H^{p+q}(\overline{X},\,\epsilon_{\overline{X}}^{-p}[p])\Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{C}) $$

を考察する必要がある．$p+q=n$，$k=-p\geqq 0$ とおいて，

$$ {}_WE_1^{-k,k+n}=H^{n-k}(\overline{X},\epsilon_{\overline{X}}^k)\simeq H^{n-k}(\widetilde{D}^k,\epsilon^k)\Longrightarrow H^n(X,\mathbb{C}) $$

とした方がみやすいかもしれない．

W（あるいは τ のシフト）が Leray のスペクトル系列を与えるフィルターに一致することが証明できるので，この E_1 項は

$$ {}_LE_2^{2p+q,-p}={}_LE_2^{n-k,k}=H^{n-k}(\overline{X},R^kj_*\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C} $$

と等しい．実は Poincaré 留数により

$$ R^nj_*\mathbb{C}\simeq\mathrm{Gr}_n^W\,\Omega_{\overline{X}}^\bullet(\log D)[n]\simeq\epsilon_{\overline{X}}^n $$

なる同型が得られるが，この同型の下で

$$ R^nj_*\mathbb{Z}\simeq(\epsilon_{\overline{X}}^n)_{\mathbb{Z}} $$

が成り立つ．（ここでは D の近傍で $\dfrac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\dfrac{dt_k}{t_k}$ の形の切断が整係数コホモロジー類である事実を使う．）

*9　増加フィルター W のシフト $W[n]$ の定義は $W[n]_m=W_{m-n}$ であり，$\mathrm{Gr}_{k+n}^{W[n]}=\mathrm{Gr}_k^W$ である．

局所定数層 ϵ^k に古典的 Hodge 理論を拡張しておくことを除けば，$\widetilde{D}^k$ は固有で非特異代数多様体の(互いに共通部分をもたない)合併であるので，この E_1 項は重さ $k+n$ の Hodge 構造をもつ．(ϵ^k は Tate の Hodge 構造 $\mathbb{Z}(-k)$ のなす局所系であった．) E_1 項の微分

$$d_1\colon {}_W E_1^{-k,k+n} \longrightarrow {}_W E_1^{-k+1,k+n}$$

は重さが等しい Hodge 構造の間の準同型ゆえ，E_2 項に重さ $k+n$ の Hodge 構造が入る．

さらに，E_2 項の微分

$$d_2\colon {}_W E_2^{-k,k+n} \longrightarrow {}_W E_2^{-k+2,k+n-1}$$

をみると，重さが異なる($k+n>k+n-1$)ことに注目できる．$d_2(F^p)\subset F^p$ かつ $d_2(\overline{F}^q)\subset \overline{F}^q$ とすると，$p+q=k+n$ に対し

$$d_2(H^{p,q}) \subset F^p \cap \overline{F}^q = 0 \quad (p+q > k+n-1)$$

となり，$d_2=0$ である．同様に，$d_r=0$ $(r>2)$ のはずである．

ところが状況はそんなに簡単ではない．問題点の一つは，アプリオリには，スペクトル系列の項は次々に部分商(部分対象の商)をとって得られるので，三つ以上のフィルターを扱う状況ではフィルターの誘導の仕方は一通りではないという点である．W に対するスペクトル系列の微分 d_r がフィルター F と両立することを示す必要がある．また，その前に次々に E_r に誘導されるフィルター F がすべて一致することも証明する必要がある．Deligne は，この二つを同時に帰納的に示している(二つのフィルターに関する補題(Lemme des deux filtrations)，Deligne [20])．

この問題点を解決するために十分な入力データは Deligne [20] において，コホモロジー的混合 Hodge 複体という概念に公理化された．混合 Hodge 構造を得るためのいわばレシピーである．

複素多様体 S 上の**コホモロジー的混合 Hodge 複体**とは，

(i)　S 上の A 加群の層の複体 K_A とその上の増加フィルター W

(ii)　S 上の $\mathbb{C}$ 加群の層の複体 $K_{\mathbb{C}}$ とその上の増加フィルター W および減少フィルター F

(iii)　準同値 $(K_A, W)\otimes\mathbb{C} \simeq (K_{\mathbb{C}}, W)$

のデータからなり，条件

（*）　フィルター $F(\mathrm{Gr}^W K_{\mathbb{C}})$ は複体の微分と強い意味で両立し，それが超コホモロジー $H^n(S, \mathrm{Gr}_k^W K_A)$ の上に重さ $n+k$ の混合 Hodge 構造を定める．

を満たすものをいう．コホモロジー的混合 Hodge 複体の超コホモロジーについて，上の定理と同じ結論が成り立つ．

この定理の証明の系として次が得られる．

系 3.52

（i）　$j: X \to \overline{X}$ に対する Leray のスペクトル系列は E_2 項で退化する．

（ii）　スペクトル系列

$$_FE_1^{p,q} = H^q(\overline{X}, \Omega_{\overline{X}}^p(\log D)) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{C})$$

は E_1 項で退化する．　□

また，重要な帰結を二つだけ挙げよう．

系 3.53　対数的微分型式 $\omega \in H^0(\overline{X}, \Omega_{\overline{X}}^p(\log D))$ が，$d\omega|X = 0$ かつそのコホモロジー類が消える，すなわち $[\omega|X] = 0$ ならば，$\omega = 0$ である．　□

これは上の系 3.52(ii)の特別な場合．

定理 3.54（固定部分定理(theorem of the fixed part)）　S を非特異代数多様体，$f: X \to S$ を固有で滑らかな射とする．

（i）　f についての Leray のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(S, R^q f_*\mathbb{Q}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Q})$$

は E_2 項で退化する．

（ii）　$H^n(\overline{X}, \mathbb{Q}) \to H^0(S, R^n f_*\mathbb{Q})$ は全射である．

（iii）　$H^0(S, R^n f_*\mathbb{Q}) = (R^n f_*\mathbb{Q})^{\pi_1(S,s)}$ $(s \in S)$ は $R^n f_*\mathbb{Q}$ に含まれる局所定数的である最大の Hodge 構造の部分変形を定める．　□

Deligne [20]参照．f が射影的である場合の証明は大分やさしい．

この定理の応用として，剛性定理，モノドロミーの半単純性等が証明できる．一方これらの結果は，一般の偏極 Hodge 構造の変形に対して Griffiths

が C^∞ Hodge 束 $\mathcal{H}^{p,q}$ *10 の Hermite ベクトル束としての曲率の性質から導いている.

Deligne は滑らかとも固有とも限らない一般の代数多様体にも函手的な混合 Hodge 構造の構成を拡張した[20]. その特別な場合として次の例がある.

例 3.55 (正規交叉多様体) (固有な)代数多様体 X が各点の近傍で非特異多様体の正規交叉因子として表示できるとき, X を正規交叉多様体という. §4.1 で登場する半安定曲線は正規交叉多様体の簡単な例である.

今, X の既約成分 X_i $(i\in I)$ はすべて滑らかであると仮定しよう. $X_J = \bigcap_{i\in J} X_i$ $(J\subset I)$, $X^{(k)} := \coprod_{|J|=k+1} X_J$ $(p\geqq 0)$ とおこう. すると, $H^n(X,\mathbb{Z})$ の混合 Hodge 構造は Čech 型の(あるいは Mayer–Vietoris 型の)複体

$$L_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{k\geqq 0} \mathbb{Q}_{X^{(k)}}, \quad L_{\mathcal{O}} = \bigoplus_{k\geqq 0} \Omega^{\bullet}_{X^{(k)}}$$

とその上のフィルター

$$W_n L_{\mathcal{O}} = \bigoplus_{k\geqq n} \mathbb{Q}_{X^{(k)}}, \quad F^p L_{\mathcal{O}} = \bigoplus_{k\geqq 0} \Omega^{\bullet\geqq p}_{X^{(k)}}$$

で決まるコホモロジー的混合 Hodge 複体により計算できる. また, W に対するスペクトル系列

$${}_W E_1^{p,q} = H^q(X^{(p)},\mathbb{Q}) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathbb{Q})$$

は E_2 項で退化する. □

正規交叉多様体は, 代数多様体の族の研究において基本的な役割を担う. その理由の一つには, Mumford の半安定還元定理(semi-stable reduction theorem)がある.

定理 3.56 (半安定還元定理) $f\colon \mathfrak{X}\to D$ を開円板 D 上の族で, f は固有で平坦な射, $f|f^{-1}(D^*)$ $(D^*=D\setminus\{0\})$ は滑らかと仮定する.

このとき, N を適当に選ぶと, 写像 $b\colon D\to D$; $z\mapsto z^N$ による基底変換(base change) $\mathfrak{X}\times_D D$ の $f^{-1}(0)$ に関する改変(modification)によって得られる族 $g\colon \mathfrak{X}\to D$ が D^* の上では(族として) f と同型であり, $g^{-1}(0)$ が正規交

*10 $\mathcal{H}^{p,q} := \mathcal{C}^\infty\otimes_{\mathcal{O}} F^p \cap \mathcal{C}^\infty\otimes_{\mathcal{O}} \overline{F^q}$, $p+q=w$, $\mathcal{C}^\infty$ は C^∞ 級函数のなす層.

叉因子であるようにできる. □

すなわち，正規交叉多様体は，固有で非特異代数多様体の極限として現れるものとして一種の標準形である. g のような中心のファイバーが正規交叉因子であるものを半安定退化(semi-stable degeneration)と呼ぶ.

半安定な族の Hodge 構造の変形の原点での漸近挙動を調べる手段について，次の項で述べよう.

(b) モノドロミー定理と周期写像の漸近挙動

Hodge 構造の変形が境界(底空間の無限遠)でどういう振舞いをするか，あるいは周期写像の極限にどういう意味があるのか，という基本的な問いに答えるのがこの項の目的である. ここでは一般の偏極 Hodge 構造の変形についてその漸近挙動を記述する.

多様体の(半安定)族から決まる幾何学的な Hodge 構造の変形に関して対数的複体を用いた極限 Hodge 構造の構成が知られている(Steenbrink [87])ことを注意しておこう.

モノドロミーに関しては，周期写像に関して少し議論した. そこでは，Hodge 構造の変形の底空間の大域的モノドロミーを説明したのだが，ここでは，完全に局所的なモノドロミーを扱う.

この項で使う記号として，開円板 $D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ および $D^*=D\setminus\{0\}$ を用意する. D^* の普遍被覆は Poincaré あるいは Siegel の上半平面 $\mathbb{H}$ である. 被覆写像は

$$\mathbb{H}\ni z\longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}\,z)\in D^*$$

である.

D 上の偏極 Hodge 構造の変形を (H,S) とする. 基本群 $\pi_1(D^*)\simeq\mathbb{Z}$ の生成元の $H_{\mathbb{Z}}$ ないし $H_{\mathbb{C}}$ へのモノドロミーとしての作用を T と記す. H に付随する周期写像(の持ち上げ)を $p\colon\mathbb{H}\to D$ とすると，

$$p(z+1)=Tp(z)$$

である.

次に Borel による偏極 Hodge 構造の変形の局所モノドロミーに関する基本

的な性質を述べよう.

定理 3.57（**モノドロミー定理**）　H を開円板上の偏極Hodge構造の変形とする. モノドロミー変換 T が

$$(T^N - I)^{M+1} = 0$$

を満たす非負整数 N, M が存在する. □

$N=1$ のときは, T が**べき単**(unipotent)の場合であり, 一般に上の性質を満たす T を**準べき単**(quasi-unipotent)と呼ぶ. $M+1$ を**べき単指数**(index of unipotence)という. 高次順像の場合は M は重さ(＝コホモロジーの次数)以下であることが知られている(Landman, N. Katz). 半安定な族に対してはべき単である(Landman).

モノドロミー定理により, ある自然数 N に対し基底変換(base change) $D \to D$; $z \mapsto z^N$ を行なって,（H をその引き戻しで置き換えることにより）モノドロミー変換 T はべき単であるとしてよい. これは幾何的状況では半安定還元をすることに対応する.（上述の Mumford の半安定還元定理(定理3.56)参照.）

以下ではモノドロミー変換 T はべき単であると仮定する.

T の対数(モノドロミー対数)を

$$\log T := -\sum_{n \geqq 1} \frac{1}{n}(I-T)^n$$

で定義する. T のべき単性より, これは有限和であることに注意しておく.

可積分接続の標準的な延長

Gauss–Manin 接続の正則性を述べたところで D^* 上の可積分接続をもつベクトル束の標準的な延長を導入した. Hodge構造の変形 H に対しても, その平坦な枠 $\{v_i\}_i$ に対して, 1価正則な断面 $\{\exp(-(\log z)\log T)v_i\}_i$ を考えて, これにより D 上に $H_{\mathcal{O}}$ を延長する. これを**標準的な延長**(canonical prolongation または extension)と呼び, $\widetilde{H}_{\mathcal{O}}$ と記す. Deligne [19]参照.

$\widetilde{H}_{\mathcal{O}}$ の定義において, モノドロミー対数 $\log T$ の代りに $T = \exp(2\pi\sqrt{-1}N)$

なる変換 N を選べばやはり延長が定義できる．以下では，$N=\log T$ としよう．

$\widetilde{H}_{\mathcal{O}}$ の定義から，接続 ∇ は 0 に高々 1 位の極をもつ接続

$$\widetilde{\nabla}\colon \widetilde{H}_{\mathcal{O}} \longrightarrow \Omega^1_D(\log 0)\otimes \widetilde{H}_{\mathcal{O}}$$

に延長する．切断 $\exp(-(\log z)\log T)v_i$ を($\widetilde{\nabla}_{\frac{d}{dz}}$ で)共変微分してみれば分かるように，$\widetilde{\nabla}$ は $\log T$ を(より一般には N を)留数(作用素)にもつ．

このような対数的な接続は，その留数(作用素)の固有値 λ の範囲を(たとえば $0\leqq\lambda<1$ というように)指定すれば $(H_{\mathcal{O}},\nabla)$ を一意的に延長する．

注意 3.58　可積分接続の標準的な延長は，一般次元で正規交叉因子の場合に同様に定まる．余次元 1 のところで本質的に決まるからである．Deligne [19]参照．底空間が 1 次元のときは定理 3.23 の後で述べた．

Hodge 構造のべき零軌道

Hodge 構造の変形 H の $\mathcal{O}$ 加群 $H_{\mathcal{O}}$ および接続 ∇ は原点 0 まで延長したが，Hodge フィルターはどうだろうか．これは，周期写像 $p\colon D^*\to\Gamma\backslash D$ の極限 $\lim_{z\to 0}p(z)$ の存在を調べることに他ならない．

自然な考えとして，コンパクトな空間 $\check{D}$ の中で極限の存在を調べよう．そのためには，p を普遍被覆 $\mathbb{H}$ まで持ち上げた

$$\widetilde{p}\colon \mathbb{H}\longrightarrow D$$

をとり，

$$\widetilde{\phi}(w) := \exp(-wN)\widetilde{p}(w)\in\check{D}$$

とおいてみる．これが $\widetilde{\phi}(w+1)=\widetilde{\phi}(w)$ を満たすことは明らかなので，$\widetilde{\phi}$ は 1 価正則写像 $\phi\colon D^*\to\check{D}$ に落ちる．($\phi(z)=\exp\left(-\dfrac{\log z}{2\pi\sqrt{-1}}N\right)p(z)$ である．)

定理 3.59 (極限 Hodge フィルターの存在)　ϕ は原点 0 まで延びる．　□

$\phi(0)\in\check{D}$ に対応するフィルターを**極限 Hodge フィルター**と呼び，$F_\infty=\{F^p_\infty\}_p$ と記す．

$\phi(0)$ は D の $\check{D}$ での閉包 $\overline{D}$ に属すかどうか分からない．Griffiths–Schmid [37]参照．

H に対応する Hodge フィルターのなす $\mathcal{O}$ 加群の延長は $F^p(\widetilde{H}_{\mathcal{O}})=\widetilde{H}_{\mathcal{O}}\cap j_*F^p(H_{\mathcal{O}})$ で与えられる．

注意 3.60 ((半安定)退化の場合)　X を滑らかな代数多様体，$f\colon X\to D$ を射影的で平坦な射で，原点 0 の外で滑らかとして，逆像 $E=f^{-1}(0)$ は正規交叉因子であるとする．

このとき，Hodge フィルター $F^p(R^nf_*\Omega^\bullet_{X/S}|S\setminus D)$ の標準的な延長は $F^p=R^nf_*(\Omega^{\bullet\geqq p}_{X/S}(\log E))$ で与えられる．$p=0$ の場合，すなわち，$R^nf_*(\Omega^\bullet_{X/S}(\log E))$ が可積分接続の標準的な延長である．ここで，相対的な場合の対数的微分型式

$$\Omega^\bullet_{X/S}(\log E)=\Omega^\bullet_X(\log E)/f^*(\Omega^1_S(\log D))\wedge\Omega^\bullet_X(\log E)[-1]$$

を用いる(Steenbrink [87])．

さて，**べき零軌道**(nilpotent orbit)とは

$$\psi(w):=\exp(wN)\phi(0)$$

と定義される写像 $\psi\colon\mathbb{H}\to\check{D}$ のことである．ψ の像がべき零 Lie 代数 $\mathbb{C}N$ に対応する群の軌道となっている．$\psi(w+1)=T\psi(w)$ が成り立つことは明らかである．

べき零軌道が元の周期写像のよい近似であることをべき零軌道定理が保証している．

定理 3.61 (べき零軌道定理)

(i)　べき零軌道は水平な写像である．

(ii)　$\operatorname{Im}w>0$ が十分大きければ $\psi(w)\in D$ である．

(iii)　$\operatorname{Im}w>0$ が十分大きければ

$$d_D(\psi(w),\widetilde{p}(w))\leqq(\operatorname{Im}w)^Be^{-2\pi\operatorname{Im}w}$$

を満足する非負定数 B が存在する．ここで，d_D は D 上の不変な距離を表す．　□

一般に，$\phi(0)$ を点 $a\in D$ で置き換えて得られる写像 ψ が，定理の最初の二つの帰結を満たすとき，ψ を(または組 (F_a,N) のことを)べき零軌道という．このべき零軌道定理と次の SL_2 軌道定理は多変数でも定式化できる．ここでは簡単のため 1 変数の場合に限っている．

極限混合 Hodge 構造

べき零軌道は周期写像のよい近似であることが分かったが，応用のためには平坦な切断の偏極で与えられる Hermite 計量(Hodge 計量という)に関する漸近評価が必要である．

これに答えを与えるのが，Schmid の $\boldsymbol{SL_2}$ **軌道定理**である．その正確な主張は高度に技術的なのでここでは与えない．$\boldsymbol{SL_2}$ **軌道**とは，Lie 群の準同型 $\mu\colon SL(2,\mathbb{R})\to G$ により与えられる水平で共変な正則写像

$$\lambda\colon \mathbb{H} \longrightarrow D, \quad \lambda(g\cdot\sqrt{-1}\,) = \mu(g)0$$

のことである．これは $\mathbb{H}$ 上の Hodge 構造の変形に対応する．

べき零軌道 (F_a, N) のうち，複素化 $\mu_{\mathbb{C}}\colon SL(2,\mathbb{C})\to G_{\mathbb{C}}$ から得られる写像

$$\lambda^c\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \check{D}$$

が，無限遠点 $\infty\in\mathbb{P}^1$ の近傍 U で $\nu\colon U\to G_{\mathbb{C}}$ に持ち上がるもので，ν について詳しく制御できるものの存在を SL_2 軌道定理は主張する．

この SL_2 軌道定理は，Deligne により予想された極限混合 Hodge 構造の存在を導く．

定理 3.62（**極限混合 Hodge 構造の存在**）　(H,S) を D^* 上の偏極 Hodge 構造の変形とする．($b\in D^*$ を選び，H_b 上の)極限 Hodge フィルター F_∞ と N に関するフィルター $W(N)$ を適当に次数の付け替えをした W でもって，$(H_b, F_\infty, W(N))$ は混合 Hodge 構造となる．

さらに，S は Gr_k^W 上の Hodge 構造の偏極(下で定義される S_k)を導く．□

Schmid [75]の(6.16), (6.17)参照．(半安定)退化の場合の極限 Hodge 構造の幾何的構成については Steenbrink [87]参照．

ここで，N に関するフィルター $W(N)$ (N フィルター，またはモノドロミーウェイトフィルターと呼ばれる)を説明しよう．定理では，M をべき単指数とするとき $W=W(N)[-M]$ と次数を付け替える．

一般に，N をベクトル空間 V 上のべき零自己準同型とするとき，次の 2 条件を満たす増加フィルター W が唯一つ存在する．

(i)　$N(W_i)\subset W_{i-2}$ $(\forall i)$.

(ii)　$N^k\colon \mathrm{Gr}_{-k}^W \simeq \mathrm{Gr}_k^W$ $(\forall k)$.

W を N に関するフィルター(N フィルター)と呼び，$W=W(N)$ と記す.

N フィルターは，$i>0$ に対して公式

$$W_{-i}=N^iW_i,\quad W_i=\mathrm{Ker}(N^{i+1}\colon V\to V/W_{-i-2})\,(=N^{-i-1}(W_{-i-2}))$$

により，十分大きな $i\,(\geqq M)$ の W_i から帰納的に決まる.

問6　N フィルターの定義の条件が，この公式を与えることを確かめよ．また，べき単指数 M が $1,2$ のときに $W(N)$ を求めよ.

$N^{m+1}=0$ とする．このとき $W_m=V$ である．$0<k\leqq m$ に対して，$N^k=0$ であるための必要十分条件は，$W_{-k}=0$ である．これは $W_{-k}\cap\mathrm{Ker}\,N=0$ といってもよい.

問7　このことを確かめよ.

V 上の N は，ちょうどコンパクト Kähler 多様体のコホモロジー $H^n(X,\mathbb{Q})$ 上の Lefschetz 作用素 L と同じように原始的分解をもつ:

$$\mathrm{Gr}_i^W\simeq\bigoplus_{m\geqq\max\{0,-i\}}P\,\mathrm{Gr}_{i+2m}^W\quad(\forall i)$$

ここで

$$P\,\mathrm{Gr}_i^W=P_N\,\mathrm{Gr}_i^W:=\mathrm{Ker}(N^{i+1}:\mathrm{Gr}_i^W\to\mathrm{Gr}_{-i-2}^W),\quad i\geqq 0$$

である.

(周期写像のべき零軌道のように) N が Q を保つとき: $Q(Nu,v)+Q(u,Nv)=0$ $(u,v\in V)$，$W(N)$ は Q に関して自己双対である，すなわち，$W_{-k}^{\perp}=W_{k-1}$.

このときさらに，$\widetilde{u},\widetilde{v}\in\mathrm{Gr}_k^W$ $(k\geqq 0)$ に対して，代表元 $u,v\in W_k$ をとり

$$Q_k(\widetilde{u},\widetilde{v})=Q(u,N^kv)$$

とおく．上の定理では，この双線型型式 Q_k が $P\,\mathrm{Gr}_k^W$ 上に偏極を誘導し，原始的分解を使って Gr_k^W 上の偏極を得る.

$W(N)$ の定義から N は Gr_k^W に 0 として作用するので，F_∞ と $\exp(zN)F_\infty$

とは Gr_k^W 上に同じフィルターを定める．したがって，上の定理は各 $z\in\mathbb{C}$ ごとに $(H_b, W, \exp(zN)F_\infty)$ は混合 Hodge 構造であることを意味する．べき零軌道定理は，$\mathrm{Im}\, z\to\infty$ のとき $\exp(zN)F_\infty$ が $F_{\exp(2\pi z)}$ を近似することを教える．しかし，$(H_b, W, F_{\exp(2\pi z)})$ は混合 Hodge 構造であるとは限らないことが知られている．

最後に，Hodge 計量によるフィルター W の特徴づけを述べる．

定理 3.63（ノルム評価） (H, Q) を D^* 上の偏極 Hodge 構造の変形とする．H の平坦な切断 v が H_b の元とみてフィルター W_k に属するための必要十分条件は，$|z|\to 0$ に従い，D の角領域上で

$$Q(Cv, \overline{v}) = O((-\log|z|)^k)$$

を満たす，すなわち $Q(cv, \overline{v})$ は $|z|\to 0$ のとき $(-\log|z|)^k$ の位数で発散することである． □

特に $k=0$ の場合から，H の 1 価の平坦な切断 v に対し，$Q(Cv, \overline{v})$ は有界である．これは $W_0\supset \mathrm{Ker}\, N = \mathrm{Ker}(T-I)$ であることから明らかである．

問 8 この包含関係を確かめよ．

例 3.64（重さ 1 の場合） 重さ 1 の Hodge 構造の周期領域は Siegel 上半空間 $\mathbb{H}_g$ であった．$H=H_{\mathbb{C}}$ とその上の非退化交代型式 Q について，$H_{\mathbb{Z}}$ のシンプレクティックな基底 $\{e_1, \cdots, e_g, f_1, \cdots, f_g\}$ を固定する．主偏極の場合を考察する．

点 $\tau\in\mathbb{H}_g$ には，$\begin{pmatrix}\tau\\ I_g\end{pmatrix}$ の列ベクトルで張られるベクトル空間 $F\subset\mathbb{C}^{2g}\simeq H$ が対応する．

さて，D^* 上の偏極 Hodge 構造の変形 H が与えられたとき，その周期写像 $p\colon D^*\to\Gamma\backslash\mathbb{H}_g$ の持ち上げ $\widetilde{p}\colon \mathbb{H}\to\mathbb{H}_g$ は $z\in\mathbb{H}$ の函数 $Z(z)\in\mathbb{H}_g$ である．局所モノドロミー T はべき単としよう．モノドロミー定理によれば，重さ 1 のときは $N^2=0$ ゆえ，一般にはモノドロミーフィルターは

$$0 = W_{-2}\subset W_{-1} = \mathrm{Im}\, N\subset W_0 = \mathrm{Ker}\, N\subset W_1 = H$$

となる．また，$W_{-1}^{\perp}=W_0$ が成り立ち，W_{-1} は等方的部分空間である．

$H_{\mathbb{Z}}$ のシンプレクティックな基底を適当に選べば，W_{-1} の基底 $\{e_1,\cdots,e_h\}$ がその一部であるようにできる．すると，N の行列表示は $N=\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，${}^tA=A=\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$（ここで A_0 は $h\times h$ 行列）となる．

$$\widetilde{\phi}(z) := \exp(-zN)\widetilde{p}(z) \in \mathbb{H}_g$$

を計算すると，

$$\widetilde{\phi}(z) = Z(z)-zA$$

となる．$\widetilde{\phi}(z)$ は1価正則で D^* に落ちるから，これは

$$Z(s) = \phi(s)+\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\log s)A, \quad s\in D^*$$

と周期写像の原点での特異性を示す式と読める． □

(c) 退化と混合 Hodge 構造

半安定退化族(family of semi-stable degeneration)が与えられたときに，前項の Hodge 構造の漸近挙動に関する理論があった．それは，中心のファイバーに依存しないデータで記述されるものであった．一方，Deligne の理論により中心のファイバーのコホモロジーも標準的な混合 Hodge 構造をもっている．この一般ファイバーの Hodge 構造の極限として得られる混合 Hodge 構造と中心のファイバーのコホモロジーとの関係をつける Clemens–Schmid 完全列について述べる．

半安定な族 $f\colon X\to S=D$ の中心のファイバー $X_0=E$ と一般ファイバー X_s $(s\in D^*)$ のコホモロジーの間の関係を知るために有効なのが，Clemens–Schmid 完全列である．例 3.55 でみた通り，$H^n(E,\mathbb{Q})$ は Deligne による標準的な混合 Hodge 構造をもっている．一方，$H^n(X_s,\mathbb{Q})$ の Hodge 構造の極限として，極限混合 Hodge 構造をもっている(§3.3(b))．

Clemens–Schmid 完全列はこれらの混合 Hodge 構造と両立していて，それから半安定族の退化の仕方に制約があることが分かり，いろいろな応用がある．

まず，Clemens–Schmid 完全列を挙げておく．$d+1=\dim X$ とおく．

$$\cdots \longrightarrow H_{2d+2-n}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H^n(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^n(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{N}$$
$$H^n(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} H_{2d-n}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H^{n+2}(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow \cdots$$

登場する写像を説明する．まず，α は合成

$$H_{2d+2-n}(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^n(X,\partial X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Q})$$

であり，最初のは Poincaré 双対の写像である．i^* は包含写像 $i\colon X_s \hookrightarrow X$ による制限である．また，N はモノドロミー対数である．今，半安定性より T がべき単であり，N は $T-I$ と可逆な自己同型の合成であることを注意しておく．β は Poincaré 双対と i_* の合成

$$H^n(X_s,\mathbb{Q}) \longrightarrow H_{2d-n}(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{i_*} H_{2d-n}(X,\mathbb{Q})$$

である．$E=X_0 \hookrightarrow X$ は変形レトラクトであることから，

$$H^n(X,\mathbb{Q}) \simeq H^n(X_0,\mathbb{Q}), \quad H_n(X,\mathbb{Q}) \simeq H_n(X_0,\mathbb{Q})$$

と同一視できる．この同型を通じて $H^n(X,\mathbb{Q})$ 上に混合 Hodge 構造が入る．

定理 3.65 (Clemens–Schmid 完全列)　上の写像の列(Clemens–Schmid 完全列)は，各項の混合 Hodge 構造を込めて完全列である． □

ここで写像 α, i^*, N, β はそれぞれ $(d+1,d+1)$, $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(-d,-d)$ 型の混合 Hodge 構造の射である．

注意 3.66　Clemens–Schmid 完全列は対 $(X,\partial X)$(あるいは $(X, X\setminus X_0)$)に対する局所コホモロジーの長完全列

$$\cdots \to H^n(X,\partial X;\mathbb{Q}) \to H^n(X,\mathbb{Q}) \to H^n(\partial X,\mathbb{Q}) \to H^{n+1}(X,\partial X;\mathbb{Q}) \to \cdots$$

と Wang の長完全列

$$\cdots \to H^n(X\setminus X_0,\mathbb{Q}) \to H^n(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H^n(X_s,\mathbb{Q}) \to H^{n+1}(X\setminus X_0,\mathbb{Q}) \to \cdots$$

とを組み合わせて得られる列である．

混合 Hodge 構造の射はフィルター W, F と強い意味で両立することだけから，Clemens–Schmid 完全列は様々に応用される．フィルター W に関する部分は純粋に位相的なものであるが，Hodge 理論を使う証明しか知られていない．特に，Hodge 加群の理論による証明は見通しがよい．

退化への応用をみる前に，定理の意味をもう少し探ろう．

最初に注意すべきは，上の定理が不変なサイクルについての特徴を与える次の定理を含んでいることである．

定理 3.67（**局所不変サイクル定理**(local invariant cycle theorem)）

$$H^n(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^n(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H^n(X_s,\mathbb{Q})$$

は完全である．すなわち，局所モノドロミーで不変な X_s のサイクルは，X のサイクルの制限として得られる． □

局所モノドロミーで不変な X_s のサイクルの全体を

$$K^n := \mathrm{Ker}(N\colon H^n(X_s,\mathbb{Q}) \to H^n(X_s,\mathbb{Q}))$$

とおく．これの一部は Clemens–Schmid 完全列により中心のファイバー $X_0 = E$ の混合 Hodge 構造から計算できる：

命題 3.68

$$W_{n-1}H^n(E,\mathbb{Q}) \simeq W_{n-1}H^n(X_s,\mathbb{Q})$$

［証明］ $W_{n-1-(2d+2)}H_{2d+2-n}(X,\mathbb{Q})=0$ を示せばよい．あるいは

$$\mathrm{Gr}^W_{k-(2d+2)}\,H_{2d+2-n}(X,\mathbb{Q}) = 0 \quad (k<n)$$

をみればよい．ところで相対コホモロジー $H^n(X,\partial X)$ の重さは $\geqq n$ だから，

$$\mathrm{Gr}^W_{k-(2d+2)}\,H_{2d+2-n}(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gr}^W_k\,H^n(X,\partial X) = 0 \quad (k<n)$$

であり，命題が示せた． ∎

モノドロミーフィルターは自己双対的であるから，この命題により $H^n(X_s,\mathbb{Q})$ は $\mathrm{Gr}^W_n\,H^n(X_s,\mathbb{Q})$ の部分(と拡大の問題)を除き $H^n(E,\mathbb{Q})$ の混合 Hodge 構造から決まることが分かる．

残っている部分 $\mathrm{Gr}^W_n\,H^n(X_s,\mathbb{Q})$ については次のことがいえる．

命題 3.69　次の列は完全である．

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gr}^W_{n-2}\,K^{n-2} \longrightarrow \mathrm{Gr}^W_{n-(2d+2)}\,H_{2d+2-n}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Gr}^W_n\,H^n(X,\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Gr}^W_n\,K^n \longrightarrow 0$$

［証明］ Clemens–Schmid 完全列の Gr^W をとったものはやはり完全列であるから，

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Gr}^W_{n-(2d+2)}\,H_{2d+2-n}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Gr}^W_n\,H^n(X,\mathbb{Q})) \simeq \mathrm{Gr}^W_{n-2}\,K^{n-2}$$

を示せばよい．ところで完全列から

$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Coker}(H^n(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H^n(X_s, \mathbb{Q}))$$

である.

べき零準同型 $N \in \mathrm{End}(V)$ の N フィルターの原始的分解から導かれる性質として,

(3.28) $\mathrm{Coker}(N\colon \mathrm{Gr}^W_{k+2} V \to \mathrm{Gr}^W_k V) \simeq \mathrm{Gr}^W_k(\mathrm{Ker}(N\colon V \to V))$

がある.

この事実を使って命題がいえた. ∎

問 9 (3.28)を確かめよ.

正規交叉多様体のところ(例 3.55)でみた, 中心のファイバーの W に関するスペクトル系列

$$_WE_1^{p,q} = H^q(X^{(p)}, \mathbb{Q}) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Q})$$

から分かることが後で必要となる.

このスペクトル系列は E_2 項で退化するが, その $_WE_2^{n,0}$ は中心のファイバー $X_0 = E$ の既約成分の双対グラフのコホモロジーで表せる.

この双対グラフは, X の各既約成分 X_i $(i \in I)$ に頂点を対応させ, $J \subset I$ に対し $X_J = \bigcap_{i \in J} X_i \neq \varnothing$ のときに単体を対応させて定義される単体的複体 Γ のことである.

$X^{(k)} := \coprod_{|J|=k+1} X_J$ $(k \geqq 0)$ とおいたことを思い起こすと, $_WE_1^{k,0} = H^0(X^{(k)}, \mathbb{Q})$ は Γ の k 単体で生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間であり, 微分 $_WE_1^{k,0} \to {}_WE_1^{k+1,0}$ はグラフ Γ のコホモロジーを計算する(Čech)複体の微分に他ならない. したがって,

$$\mathrm{Gr}_0^W H^n(X, \mathbb{Q}) \simeq {}_WE_2^{n,0} \simeq H^n(|\Gamma|, \mathbb{Q})$$

を得る($|\Gamma|$ は Γ の幾何学的実現).

これを使って, モノドロミーのべき単指数についての情報を中心のファイバーのデータから読み取ることができる.

命題 3.70 モノドロミー対数 N の $k\,(>0)$ 乗が消えるための必要十分条

件は次で与えられる．

$$N^k=0 \iff W_{n-k}H^n(E,\mathbb{Q})=0$$

特に，$N^{n+1}=0$ である．また，$N^n=0 \Longleftrightarrow H^n(|\Gamma|,\mathbb{Q})=0$ である．　□

最初の主張は一般的な事実である．§3.3(b)の問7を参照のこと．特に，$k=n$ の場合から二つ目の主張がでる．

以上の議論が具体的に働く例をみてみよう．

例 3.71（曲線の半安定退化）　ファイバーの次元が1の場合を考えよう．

まず，$H^1(X_s,\mathbb{Q})$ 上で $N^2=0$ である．$H_3(X_0,\mathbb{Q})=0$, $H^3(X_0,\mathbb{Q})=0$ だから，Clemens–Schmid 完全列は

$$0 \longrightarrow H^1(X_0,\mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*} H^1(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H^1(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} H_1(X_0,\mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

となり，$H^1(X_0,\mathbb{Q})=\mathrm{Ker}\,N$ である．また，

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_2^W H^1(X_s,\mathbb{Q}) &\simeq \mathrm{Gr}_0^W H^1(X_s,\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Gr}_0^W H^1(X_0,\mathbb{Q}) \simeq H^1(|\Gamma|,\mathbb{Q})\\ \mathrm{Gr}_1^W H^1(X_s,\mathbb{Q}) &\simeq \mathrm{Gr}_1^W H^1(X_0,\mathbb{Q})\\ &\simeq \mathrm{Ker}(H^1(X^{(0)},\mathbb{Q}) \to H^1(X^{(1)},\mathbb{Q})) = H^1(X^{(0)},\mathbb{Q})\end{aligned}$$

を得る．

これより，$b_1(X_s)=2h^1(|\Gamma|)+\dim H^1(X^{(0)},\mathbb{Q})$ を得る．$\dim H^1(X^{(0)},\mathbb{Q})=\sum_i \dim H^1(X_i,\mathbb{Q})=2\sum_i g(X_i)$ とあわせて，等式 $g(X_s)=\sum_i g(X_i)+h^1(|\Gamma|)$ を得る．また，$N=0 \Longleftrightarrow h^1(|\Gamma|)=0 \Longleftrightarrow g(X_s)=\sum_i g(X_i)$ である．　□

例 3.72（曲面の退化）　ファイバーの次元が2の場合を考えよう．

まず，$H^2(X_s,\mathbb{Q})$ を中心とする Clemens–Schmid 完全列の部分は次で与えられる．

$$\begin{aligned}&0 \longrightarrow H^0(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} H_4(X_0,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H^2(X_0,\mathbb{Q}) \xrightarrow{i^*}\\ &H^2(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{N} H^2(X_s,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\beta} H_2(X_0,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H^6(X_0,\mathbb{Q})\end{aligned}$$

$H^2(X_s,\mathbb{Q})$ の Gr^W を求めると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}_0^W H^2(X_s,\mathbb{Q}) &\simeq \mathrm{Gr}_0^W H^2(X_0,\mathbb{Q}) \simeq H^2(|\Gamma|,\mathbb{Q})\\ \mathrm{Gr}_1^W H^2(X_s,\mathbb{Q}) &\simeq \mathrm{Gr}_1^W(\mathrm{Ker}\,N) \simeq \mathrm{Gr}_1^W H^2(X_0,\mathbb{Q})\end{aligned}$$

$$\simeq \mathrm{Coker}(H^1(X^{(0)}, \mathbb{Q}) \to H^1(X^{(1)}, \mathbb{Q}))$$

$\mathrm{Gr}_2^W H^2(X_s, \mathbb{Q})$ はもう少し難しい.（後の問 10 参照.）

これを次元の等式にするために,

$$\Phi = \dim \mathrm{Ker}(H^1(X^{(0)}) \to H^1(X^{(1)}))$$

$$q = \frac{1}{2} h^1(X^{(0)}) = \sum_i q(X_i) \ \ (q(Y) \text{ は } Y \text{ の不正則数 } = h^1(Y, \mathcal{O}))$$

$$g = \frac{1}{2} h^1(X^{(1)}) = 2 \text{ 重曲線の種数の和}$$

とおく. すると,

$$\dim \mathrm{Gr}_0^W H^2(X_s, \mathbb{Q}) = h^2(|\Gamma|), \quad \dim \mathrm{Gr}_1^W H^2(X_s, \mathbb{Q}) = \Phi - 2q + 2g$$

となる. これから, 局所モノドロミーのべき単指数の評価に関する次の判定法を得る.

$$N^2 = 0 \iff h^2(|\Gamma|) = 0$$

$$N = 0 \iff h^2(|\Gamma|) = 0 \quad \text{かつ} \quad \Phi - 2q + 2g = 0$$

$H^1(X_s, \mathbb{Q})$ 上の N についても, 曲線のときと同様に $N = 0 \iff h^1(|\Gamma|) = 0$ となる. □

問 10　次の等式を導け.

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{Gr}_2^W H^2(X_s, \mathbb{Q}) \\
&\quad = b_2(X_s) - 2\Phi + 4q - 4g - 2h^2(|\Gamma|) \\
&\quad = h^2(|\Gamma|) + h^0(|\Gamma|) - \#\{\text{既約成分 } X_i\} + \dim \mathrm{Ker}(H^2(X^{(0)}, \mathbb{Q}) \to H^2(X^{(1)}, \mathbb{Q}))
\end{aligned}$$

曲面の半安定退化の双有理的な標準形はいろいろと調べられている. 特に, K3 曲面の場合は三つのタイプに分けられる(Kulikov, Persson–Pinkham の定理). その場合, 上の計算を具体的に求めることができる. 三つのタイプはちょうど, (I) $N=0$, (II) $N \neq 0$, $N^2 = 0$, (III) $N^2 \neq 0$, $N^3 = 0$ の場合に対応することが分かる. また, $H^2(X_s)$ 上のモノドロミーフィルターの次元が(II)の場合, $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 20$, $\dim W_3 = 22$, (III)の場合, $\dim W_0$

$=\dim W_1=1$, $\dim W_2=\dim W_3=21$ となることが確かめられる.

R. Friedman [33] はK3曲面の安定退化を用いる議論により，K3曲面の大域的Torelli定理の別証を得た．その方法の概要は次の通りである．まず周期写像 $p\colon \mathcal{M}\to\Gamma\backslash D$ は適当なコンパクト化へ延長できることを示し，それを

$$\overline{p}\colon \overline{\mathcal{M}}\longrightarrow\overline{\Gamma\backslash D}$$

と記すと，$\overline{p}$ が固有射である．次に $\overline{p}$ が境界 $\overline{\mathcal{M}}\setminus\mathcal{M}$ で不分岐であること，それから $\overline{p}$ のファイバーが1点からなることを(境界で)示す．その際，境界上での解析に上の結果を有効に適用した．また，(W が2ステップからなる)混合Hodge構造の拡大の理論が必要となる．これについてはFriedman [33], Griffiths et al. [39] 第X章参照.

《要 約》

3.1 Kähler多様体のコホモロジーはHodge分解をもつ．Hodge分解はKähler計量のとり方によらず，(p,q) 型の微分型式からできる2重複体のフィルターを使って記述できる．Kähler多様体のコホモロジーはLefschetz分解をもち，その原始的部分はHodge–Riemannの双線型関係式を満たす.

3.2 Hodge構造の定義と偏極Hodge構造の定義.

3.3 Hodge構造の変形の定義および偏極Hodge構造の変形の定義と基本性質.

3.4 偏極Hodge構造から定まる周期領域とそのコンパクト双対の定義．周期領域はLie群の等質空間として実現できる．周期領域の接束の群論的記述と水平接ベクトル束の定義.

3.5 S 上の偏極Hodge構造の変形が与えられると，S から周期領域を不連続群で割った商空間への正則写像が定義でき，周期写像と呼ばれる.

3.6 射影射 $f\colon\mathfrak{X}\to S$ の $R^w f_*\mathbb{Z}$ はHodge構造の変形を定め，その原始的部分 $R^w_{\mathrm{prim}}f_*\mathbb{Z}$ は偏極Hodge構造の変形を定め，したがって周期写像 $p\colon S\to\Gamma\backslash D$ を定める.

3.7 Gauss–Manin接続の定義とその基本性質.

3.8 無限小Torelli問題とそのコホモロジーによる定式化.

3.9　Hodge 構造の無限小変形と弱大域的 Torelli 問題.

3.10　大域的 Torelli 問題.

3.11　周期写像の境界での挙動. べき零軌道定理と SL_2 軌道.

3.12　混合 Hodge 構造の定義とその基本性質.

3.13　射影多様体の族の退化に伴う Hodge 構造の極限として混合 Hodge 構造が出現する.

3.14　開代数多様体のコホモロジーは混合 Hodge 構造をもつ.

3.15　Clemens–Schimid 完全列と代数多様体の退化への応用.

4 共形場理論

共形場理論は3人の物理学者 Belavin, Polyakov, Zamodolochikov によって1984年に創始された([9]). 2次元可解格子模型理論のある種の極限をとると，共形不変な場の理論がでてくる．彼らの目的は共形場理論を考察することによって2次元可解格子模型の理解を深めることにあったと思われる．しかしながら，共形場理論は弦理論との関係もあり，物理的にも興味ある理論として注目をあびた．それのみならず，数学的にも無限次元 Lie 代数の表現論，閉 Riemann 面のモジュライ理論等との深い結びつきが明らかになり，興味ある研究対象となった．本章では共形場理論のなかでも Wess–Zumino–Witten 理論，あるいは非 Abel 的共形場理論と呼ばれる，複素単純 Lie 代数をゲージ対称性にもつ共形場理論，正確には正則共形場理論について理論の一端を紹介する．

共形場理論は共形不変性をもつ2次元場の量子論であり，本来的には実数上の理論である．しかしながら，この理論は正則な理論(物理では正則のかわりに chiral という用語を用いる)と非正則な理論とに分かれ，両者を組み合わせることによって物理的な共形場理論が構成できることが知られている(これは物理的な仮定であるように筆者には思われる)．正則理論と非正則理論との合成も数学的に興味ある事実が物理学者によって示されているが(Cappli–Itzykson–Zuber [13])，本章では正則共形場理論についてのみ論じる．

通常の平面の共形変換は角度を変えない変換として捉えることができる．平面を複素平面とみると，向きを変えない共形変換は正則写像に，向きを逆にする共形変換は非正則変換とみることができる．正則変換のみを共形変換として考える理論が正則共形場理論である．より正確には正則共形場理論とは正則な座標変換に関して共変的な2次元場の量子論であるということができる．実際には正則写像ではなくその無限小版

$$\xi \longmapsto \xi + \varepsilon f(\xi)$$

を使う．ここで ε は第1章と同様に双対数を表す．座標のとり替えを考える必要があるので無限小正則変換では $f(\xi)$ は原点の近傍で正則な函数と考えるよりは局所正則ベクトル場 $f(\xi)\dfrac{d}{d\xi}$ と考える方が自然である．特に特別な正則ベクトル場

$$l_n = -\xi^{n+1}\frac{d}{d\xi}, \quad n = -1, 0, 1, 2, \cdots$$

をとると，ベクトル場のブラケット積

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}$$

が成立し，$\{l_n\}_{n \geqq -1}$ は無限次元 Lie 代数の構造をもつことが分かる．特に $\{l_{-1}, l_0, l_1\}$ は Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ と同型な Lie 代数をなし，対応する正則変換は1次分数変換であることが分かる．したがって正則共形場理論はこうした無限小変換で共変的に振る舞う場の理論である．

大変奇妙なことに Belavin–Polyakov–Zamodolochikov は上の無限小正則変換を考えるときに，ベクトル場 $f(\xi)\dfrac{d}{d\xi}$ には原点 $\xi=0$ で極を許して考えた．これはもはや無限小正則変換と考えることはできない．複素構造の無限小変形におなじみの読者にはこの変換は ξ が定める座標近傍 U とその外側の座標との座標変換を与えており，複素構造の無限小変形とみることができることに気づかれたであろう．事実，有理型ベクトル場 $f(\xi)\dfrac{d}{d\xi}$ は $U \cap V$, $V = R \setminus \{Q\}$ (ξ は閉 Riemann 面 R の点 Q を中心とする座標と考える)上の正則ベクトル場に値をとる1次コサイクルと考えることができる．Belavin–Polyakov–Zamodolochikov は $R = \mathbb{P}^1$ の場合のみを考察したが，実際には種数が高い Riemann 面上で共形場理論を考えることができ，その際

には一つの Riemann 面ではなく，その近傍の Riemann 面を考える必要があることをこの事実は示唆している．Belavin–Polyakov–Zamodolochikov は，なぜ有理型ベクトル場で共変な理論を考える必要があるかを論文[9]では何も述べていないが(というよりは無限小正則変換を考えるといいながら，$f(\xi)\dfrac{d}{d\xi}$ に原点で極をもたせて考察している)，実際には上の無限次元 Lie 代数 $\{l_n\}_{n\geqq -1}$ ではなくそれより大きい Virasoro 代数 $\{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で共形不変な理論を考える必要があったことによると思われる．Virasoro 代数 $\{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は中心をもたないが，理論を量子化することによって $\{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の中心拡大が自然に登場する．2 次元場の量子論では量子化は正規順序 $\circ\atop\circ$ $\circ\atop\circ$ を考えることで達成される．具体的には § 4.2 でエネルギー運動量テンソル $T(z)$ を菅原型式で導入することによって行なわれる．ただ．ここでの定義はアフィン Lie 代数の積分可能表現を用いるので，Virasoro 代数 $\{l_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ との関係は明らかでないが，局所ベクトル場 $l(z)\dfrac{d}{dz}$ に対して Virasoro 代数の元 $T\left[l(z)\dfrac{d}{dz}\right]$ を導入することによって結びつけられる．

ところで，正則共形場理論とは何であろうか？　数学的には次のように定式化することができる．まず，Riemann 面上で基本的な役割をする基本粒子のリストを与えるラベルの集合 Λ を考える．この集合 Λ には粒子 λ に対してその反粒子 $\lambda^\dagger$ も必ず含まれていると仮定する．したがって，位数 2 の写像(通常インヴォリューションという) $\dagger\colon \Lambda\ni\lambda\mapsto\lambda^\dagger\in\Lambda$ が存在すると仮定する．

さて，閉 Riemann 面 R の N 個の点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ に関して，点 Q_j に粒子 λ_j が飛び込んできたときの閉 Riemann 面 R の物理状態を記述せよという問題を考える(図 4.1)．通常の量子力学では物理状態は状態を記述する Hilbert 空間の 1 次元部分ベクトル空間で与えられるが，正則共形場理論では物理状態を記述する無限次元のベクトル空間の有限次元ベクトル部分空間で問題の物理状態が記述されていると考える．(これは正則共形場理論を考えているのでこのようになるが，実際の物理的な共形場理論は正則共形場理論と反正則共形場理論とを合成して 1 次元部分ベクトル空間を得る必要がある．) したがって正則共形場理論を次のように考えてもそれほど不自然ではな

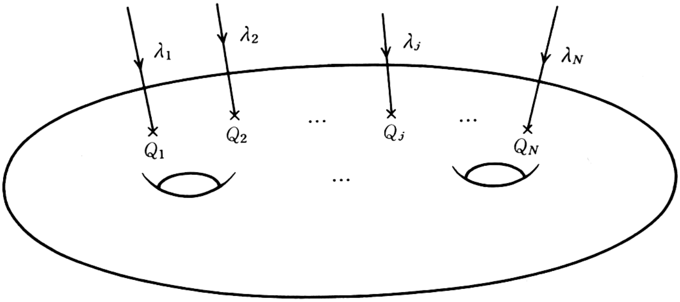


図 4.1　閉 Riemann 面 R 上の点 Q_j に粒子 λ_j が飛び込んでいる

いことが分かろう.

N 点付閉 Riemann 面，すなわち閉 Riemann 面 R とその上の点 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ の組 $\mathfrak{X}=(R; Q_1, \cdots, Q_N)$ とラベルの組 $\vec{\lambda}=(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ に対して有限次元ベクトル空間 $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ を対応させる．この対応は，実際には点 Q_j での局所座標のとり方にも依存するので，正確には $\mathfrak{X}$ には局所座標のデータを入れておく必要があるが，ここでは簡単のため座標は省略する．ところでラベルの集合 Λ には粒子がない状態を表す 0 が含まれており，$0^{\dagger}=0$ であると仮定する．N 点付閉 Riemann 面 $\mathfrak{X}=(R; Q_1, \cdots, Q_N)$ に対して Q_j 以外の点 P をとり，あらたに $N+1$ 点付閉 Riemann 面 $\widehat{\mathfrak{X}}=(R; P, Q_1, \cdots, Q_N)$ を考える．点 P に粒子 0 を対応させることは実際には何も起こらないことを意味するから，

（C.1）　標準的な同型 $\mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\widehat{\mathfrak{X}}) \simeq \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ が存在する

と仮定することは自然であろう.

ところで Riemann 面 R が次第に退化していって通常 2 重点をもつ場合を考える必要があるので，実際には安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(R; Q_1, \cdots, Q_N)$ に対して有限次元ベクトル空間 $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ を対応させることができると仮定する．このとき，R の通常 2 重点 P を正規化することによって新しい曲線 $\widetilde{\mathfrak{X}}$ と点 P に対応する 2 点 P_+, P_- が現れる（図 4.2）．このとき曲線 R 上を運動している粒子は点 P で曲線が離れてしまうので，外に姿を現すことになる.

点 P_- から出た粒子 λ は点 P_+ で曲線 $\widetilde{\mathfrak{X}}$ に飛び込んでいく．点 P_- から粒子 λ が飛び出すことは，反粒子の言葉を使えば点 P_- から粒子 $\lambda^{\dagger}$ が飛び込む

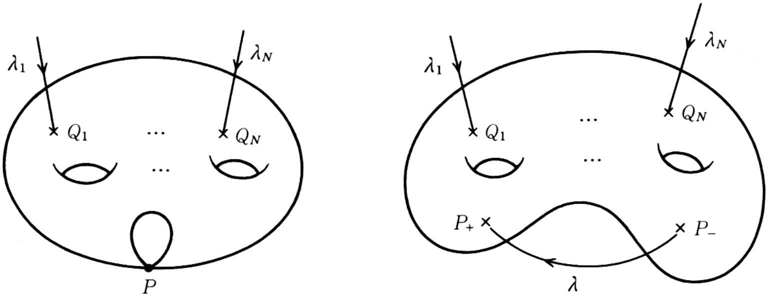


図 4.2

と言い換えることができる．共形場理論の大切な要請は通常 2 重点 P で面を切り離して新しい面を作ったときに，この両者の物理状態は同じであると考えることにある．これは

(C.2) 標準的な同型 $\bigoplus_{\mu\in\Lambda}\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda},\mu\mu^{\dagger}}(\widetilde{\mathfrak{X}})\simeq\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ が存在する

と定式化できる．ここで

$$\widetilde{\mathfrak{X}}=(\widetilde{R};Q_1,Q_2,\cdots,Q_N,P_+,P_-)$$

とおいた．

さらに

(C.3) $\dim\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ は曲線 R の種数と点の個数 N および $\vec{\lambda}$ にのみ依存する

ことを要請する．以上の要請では共形不変性は直接みることはできないが，最後に無限小変形に関連して

(C.4) N 点付 Riemann 面のモジュライ空間 $\mathfrak{M}$ 上で $\bigoplus_{[\mathfrak{X}]\in\mathfrak{M}}\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ はベクトル束 $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}$ をなし，このベクトル束上には射影的平坦接続が存在する．さらにこのベクトル束は安定 N 点付 Riemann 面のモジュライ空間 $\overline{\mathfrak{M}}$ 上に拡張され，射影的平坦接続は確定特異点を境界 $\overline{\mathfrak{M}}\setminus\mathfrak{M}$ 上でもつ

ことを要請する．

以上の要請(C.1)～(C.4)を満足する理論を具体的に構成するためには，上の要請をさらに精密化する必要がある．本章では粒子を表すラベルが複素

単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から構成されるアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル l の積分可能表現の場合に，以上の要請を満足する理論を Tsuchida–Ueno–Yamada [91] と Ueno [93] に基づいて具体的に構成する．

§4.1　安定点付曲線とそのモジュライ

(a)　安定点付曲線と形式近傍

以下では複素1次元連結コンパクト被約解析空間 C を考える．C は複素射影空間の閉部分複素多様体として実現できることが知られているので，C を単に**代数曲線**(algebraic curve)と呼ぶ．本書では代数曲線は被約であることを仮定する．以下では代数曲線 C の特異点としては一番簡単な特異点である**通常2重点**(ordinary double point)のみを考える．代数曲線 C の点 Q の開近傍 U が $\mathbb{C}^2$ 内の原点の開近傍 $V_\varepsilon=\{(x,y)\,|\,|x|<\varepsilon,\ |y|<\varepsilon\}$ 内

$$xy=0$$

と定義される解析的集合と複素解析的に同型であり，原点が点 Q に対応するとき，Q を通常2重点という．非特異であるか，特異点をもつ場合には通常2重点のみを特異点として許す代数曲線を**半安定曲線**(semi-stable curve)と呼ぶ．

定義 4.1　以下の性質をもつ代数曲線 C と C 上の N 個の点 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_N$ の組 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,Q_2,\cdots,Q_N)$ を**安定 N 点付曲線**(stable N-pointed curve)という．

(1)　代数曲線 C は半安定曲線である．

(2)　C は点 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_N$ で非特異である．

(3)　C の既約成分 C_i が射影直線(1次元射影空間) $\mathbb{P}^1$ であるとき C_i 上にある C の特異点の個数と C_i 上にある $\{Q_1,\cdots,Q_N\}$ の個数の和は3以上である．また C_i が楕円曲線かまたは通常2重点を1個もつ有理曲線のときは C_i 上に $\{Q_1,\cdots,Q_N\}$ の点が少なくとも1個あるか，C は C_i 以外に成分をもつ．　□

安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,Q_2,\cdots,Q_N)$ に対して

$$g=\dim_{\mathbb{C}} H^1(C,\mathcal{O}_C)$$

を $\mathfrak{X}$ の**種数**という．代数曲線論から $H^1(C,\mathcal{O}_C)=0$ であれば $C\simeq\mathbb{P}^1$ であることが分かる．したがって種数 0 の安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,Q_2,\cdots,Q_N)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とその上の N 個の点 $Q_1,\cdots,Q_N$ の組である．このとき上の条件(3)より $N\geqq 3$ でなければならないことが分かる．

問 1　上の定義の条件(1), (2)を満足する N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,\cdots,Q_N)$ を考える．$\mathfrak{X}$ の自己同型 f とは $f(Q_j)=Q_j$, $j=1,2,\cdots,N$ を満足する C の自己同型写像 $f\colon C\to C$ のことである．条件(1), (2)を満足する N 点付曲線 $\mathfrak{X}$ が条件(3)を満足するための必要条件は $\mathfrak{X}$ の自己同型群が有限群であることを示せ．

補題 4.2　半安定曲線 C の正規化を $\widetilde{C}$ と記すと

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(C,\mathcal{O}_C)=\dim_{\mathbb{C}} H^1(\widetilde{C},\mathcal{O}_{\widetilde{C}})+\dim_{\mathbb{C}} H^1(G(C),\mathbb{C})$$

が成立する．ただし，$G(C)$ は C の連結成分のグラフである．

［証明］　C の特異点を $P_1,\cdots,P_l$ と記す．自然な写像 $\nu\colon\widetilde{C}\to C$ による P_i の逆像を P_i^+,P_i^- と記す．このとき，C 上の層の完全列

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_C\longrightarrow\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}\stackrel{\tau}{\longrightarrow}\bigoplus_{i=1}^{l}\mathbb{C}_{P_i}\longrightarrow 0$$

が存在する．$\mathbb{C}_{P_i}$ は点 P_i 上の基が $\mathbb{C}$，他は 0 である層である．準同型写像 τ は P_i の近傍 U_i の逆像 $\nu^{-1}(U_i)$ 上の正則函数 f に対して $f(P_i^+)-f(P_i^-)$ を対応させる写像である．この完全列より長完全列

$$\begin{aligned}0\longrightarrow H^0(C,\mathcal{O}_C)\longrightarrow H^0(\widetilde{C},\mathcal{O}_{\widetilde{C}})&\stackrel{\tau}{\longrightarrow}\mathbb{C}^{\oplus l}\\&\longrightarrow H^1(C,\mathcal{O}_C)\longrightarrow H^1(\widetilde{C},\mathcal{O}_{\widetilde{C}})\longrightarrow 0\end{aligned}$$

を得る．このとき $\mathrm{Coker}(H^0(\widetilde{C},\mathcal{O}_{\widetilde{C}})\to\mathbb{C}^{\oplus l})\simeq H^1(G(C),\mathbb{C})$ であることは τ の定義より直ちに分かる．∎

ところで半安定曲線 C の通常 2 重点 P の近傍 U は $\mathbb{C}^2$ 内の解析的集合

$$xy=0$$

の原点の近傍と同型であった．C の **Kähler 微分**(Kähler differential)の層

Ω_C^1 は点 P の近傍では

$$\Omega_C^1 = (\mathcal{O}_C dx + \mathcal{O}_C dy)/(xdy + ydx)\mathcal{O}_C$$

と表示できる．一方 C の**双対化層**(dualizing sheaf) ω_C は C の可逆層であり，点 P の近傍では $x \neq 0$ のとき $\mathcal{O}_C\left(\dfrac{dx}{x}\right)$，$y \neq 0$ のときは $\mathcal{O}_C\left(-\dfrac{dy}{y}\right)$ で与えられる．また C の特異点以外では Ω_C^1 と ω_C とは一致するので，C 上

$$\Omega_C^1 = \mathfrak{m}\omega_C$$

であることが分かる．ここで $\mathfrak{m}$ は C の特異点の定義イデアルである．したがって完全列

$$0 \longrightarrow \Omega_C^1 \longrightarrow \omega_C \longrightarrow \omega_C \otimes \mathcal{O}_{C_{\text{sing}}} \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

が存在することが分かる．

ところで共形場理論を展開するためには半安定曲線 C 上の点 Q_j だけでなく，Q_j を中心とする座標を決めておく必要がある．

定義 4.3　代数曲線 C の非特異点 Q に対して $\mathbb{C}$ 代数としての同型

$$s^{(n)}\colon \mathcal{O}_{C,Q}/\mathfrak{m}_Q^{n+1} \simeq \mathbb{C}[[\xi]]/(\xi^{n+1})$$

を点 Q での **n 次の無限小近傍**(n-th infinitesimal neighbourhood) という．ここで $\mathfrak{m}_Q$ は $\mathcal{O}_{C,Q}$ の極大イデアル，$\mathbb{C}[[\xi]]$ は形式的べき級数環である．さらに $\mathbb{C}$ 代数としての同型

$$s\colon \widehat{\mathcal{O}}_{C,Q} = \varprojlim_n \mathcal{O}_{C,Q}/\mathfrak{m}_Q^{n+1} \simeq \mathbb{C}[[\xi]]$$

を点 Q の**形式近傍**(formal neighbourhood) と呼ぶ．　□

さて安定 N 点付曲線 $(C; Q_1, \cdots, Q_N)$ の各点 Q_j に形式近傍 s_j を付け加えた $\mathfrak{X}(C; Q_1, \cdots, Q_N; s_1, \cdots, s_N)$ を**形式近傍をもった安定 N 点付曲線**(stable N-pointed curve with formal neighbourhoods) と呼ぶ．また形式近傍 s_j のかわりに n 次の無限小近傍 $s_j^{(n)}$ を点 Q_j に付け加えた **n 次の無限小近傍をもった安定 N 点付曲線**(stable N-pointed curve with n-th infinitesimal neighbourhoods) $\mathfrak{X} = (C; Q_1, \cdots, Q_N; s_1^{(n)}, \cdots, s_N^{(n)})$ を考えることも重要である．

代数曲線 C 上の $\mathcal{O}_C$ 加群 $\mathcal{F}$ と非特異点 $Q_1, \cdots, Q_N$ に対して

$$H^0\left(C, \mathcal{F}\left(*\sum_{j=1}^N Q_j\right)\right) = \varinjlim_m H^0\left(C, \mathcal{F}\left(m\sum_{j=1}^N Q_j\right)\right)$$

と定義する．ただし $\mathcal{O}_C\left(m\sum_{j=1}^N Q_j\right)$ は点 $Q_1, \cdots, Q_N$ で高々 m 位の極をもち，他で正則な函数のなす層であり，$\mathcal{F}\left(m\sum_{j=1}^N Q_j\right) = \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_C}\mathcal{O}\left(m\sum_{j=1}^N Q_j\right)$ である．形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X} = (C; Q_1, \cdots, Q_N; s_1, \cdots, s_N)$ に対して形式近傍から定まる形式座標 $\xi_j = s_j^{-1}(\xi)$ を使って Laurent 展開することによって写像

$$t = \bigoplus_{j=1}^N t_j\colon\ H^0\left(C, \mathcal{O}\left(*\sum_{j=1}^N Q_j\right)\right) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{C}((\xi_j))$$

$$t = \bigoplus_{j=1}^N t_j\colon\ H^0\left(C, \omega_C\left(*\sum_{j=1}^N Q_j\right)\right) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{C}((\xi_j))d\xi_j$$

を定義することができる．ここで $\mathbb{C}((\xi_j))$ は形式的 Laurent 級数のなす環である．この写像は点 $Q_1, \cdots, Q_N$ が次の条件(Q)を満足すれば単射であることは容易に分かる．

条件(Q)　曲線 C の各既約成分上に少なくとも 1 点 Q_j がのっている．

形式的微分型式

$$\tau = \left(\sum_{k=-n}^{+\infty} a_k\xi^k\right)d\xi$$

に対して $\operatorname*{Res}_{\xi=0}(\tau)$ を

$$\operatorname*{Res}_{\xi=0}(\tau) = a_{-1}$$

と定義する．すると留数ペアリング

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Res}\colon & \displaystyle\bigoplus_{j=1}^N \mathbb{C}((\xi_j)) \times \bigoplus_{j=1}^N \mathbb{C}((\xi_j))d\xi_j & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f_1, \cdots, f_N, g_1 d\xi_1, \cdots, g_N d\xi_N) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^N \operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(f(\xi_j)g(\xi_j)d\xi_j) \end{array}$$

を定義することができる．このとき，次の事実は基本的である．

命題 4.4　留数ペアリングによって $H^0\left(C, \mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^N Q_j\right)\right)$ と $H^0\Big(C,$

$\omega_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\Big)$ とは互いに相手の零化空間である． □

(b) 安定点付曲線のモジュライ

特異多様体の変形は滑らかな写像のかわりに平坦な写像を使って§1.1(a)と類似の形で定義される．半安定曲線 C に対して1次の無限小変形は $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C)$ の元で与えられる．半安定曲線の倉西族は底空間の各点で普遍的であることが知られている．(たとえば[41] 3章Bを参照されたい．)

さらに安定点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,\cdots,Q_N)$ の倉西空間の接空間は $\mathrm{Ext}^1\left(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C\left(-\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ で与えられる．C が特異点をもたなければ，これは $H^1\left(C, \Theta_C\left(-\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ と一致する．$\mathrm{Ext}^2\left(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C\left(-\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)=0$ であるので倉西族は存在し，かつ非特異である．

例 4.5

(1) $(\mathbb{P}^1;Q_1,Q_2,Q_3)\simeq(\mathbb{P}^1;0,1,\infty)$ であるので3点付 $\mathbb{P}^1$ のモジュライ空間は唯1点からなる．ここで ∞ は $\mathbb{P}^1$ の無限遠点を表す．

(2) $(\mathbb{P}^1;Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)\simeq(\mathbb{P}^1;0,1,\infty,\lambda)$ である．したがって $\lambda\in\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ は4点付 $\mathbb{P}^1$ のパラメータであり，$\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ は4点付 $\mathbb{P}^1$ のモジュライ空間である．λ が $0,1,\infty$ に近づくとき，4点付 $\mathbb{P}^1$ は種数0の安定4点付曲線に退化していく．その様子は $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を3点 $(0,0),(1,1),(\infty,\infty)$ でブローアップすることによってみることができる(図4.3)．

退化した安定4点付曲線は2個の2点付 $\mathbb{P}^1$ が1点で交わったものである． □

定義 4.6　以下の条件を満足する $\mathfrak{F}=(\pi:Y\to B;s_1,s_2,\cdots,s_N;\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)$ を**形式近傍をもった種数 g の安定 N 点付曲線の族**(family of stable N-pointed curves of genus g with formal neighbourhoods)という．

(1) Y,B は連結複素多様体，$\pi: Y\to B$ は固有かつ平坦な正則写像である．$s_j: B\to Y$ は π の正則切断(すなわち $\pi\circ s_j=id_B$ となる正則写像)

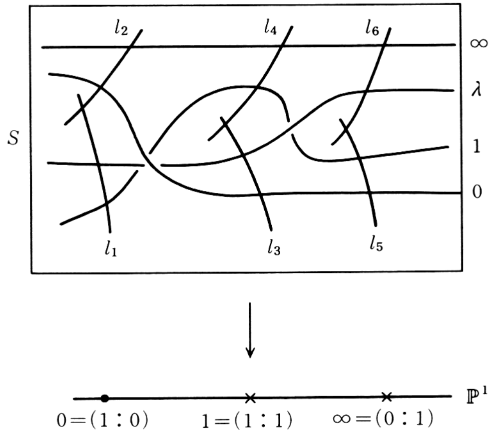


図 4.3

である．

（2） 各点 $b \in B$ に対して $(Y_b = \pi^{-1}(b); s_1(b), s_2(b), \cdots, s_N(b))$ は種数 g の安定 N 点付曲線である．

（3） $s_j(B)$ の Y での定義イデアルを I_j，$s_j(B)$ に沿っての $\mathcal{O}_Y$ の完備化を $\widehat{\mathcal{O}_{Y/s_j}}$ と記すと，η_j は $\mathcal{O}_B$ 代数の同型写像

$$\eta_j : \widehat{\mathcal{O}_{Y/s_j}} \simeq \varprojlim_{n \to \infty} \mathcal{O}_Y / I_j^N \simeq \mathcal{O}_B[[\xi]] \tag{4.2}$$

を与える． □

後に示すように Y, B としては有限次元の複素多様体の射影的極限を考える必要がある．また形式近傍のかわりに **n 次の無限小近傍をもった種数 g の安定 N 点付曲線の族**(family of stable N-pointed curves of genus g with n-th infinitesimal neighbourhoods)の族 $\mathfrak{F} = (\pi : Y \to B; s_1, \cdots, s_N; \eta_1^{(n)}, \cdots, \eta_N^{(n)})$ を考えるときは(4.2)のかわりに $\mathcal{O}_B$ 代数の同型写像

$$\eta_j^{(n)} : \mathcal{O}_Y / I_j^{n+1} \simeq \mathcal{O}_B[[\xi]] / I_j^{n+1} \tag{4.3}$$

で定義する．

定理 4.7 n 次の無限小近傍をもった安定 N 点付曲線の族 $\mathfrak{F} = (\pi : Y \to B; s_1, \cdots, s_N; \eta_1^{(n)}, \cdots, \eta_N^{(n)})$ に対して小平–Spencer 写像

$$\rho\colon T_bB \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{Y_b}}\left(\Omega^1_{Y_b},\, \Omega_{Y_b}\left(-(n+1)\sum_{j=1}^{N} s_j(b)\right)\right)$$

が各点 $b\in B$ で定義できる．さらに，小平–Spencer 写像は $\mathcal{O}_B$ 加群の準同型写像

$$\rho\colon \Theta_B \longrightarrow R^1\pi_*\underline{Hom}\left(\Omega^1_{Y/B},\, \Omega_Y\left(-(n+1)\sum_{j=1}^{N} s_j(B)\right)\right)$$

を引き起こす．　□

定理 4.8　安定 N 点付曲線 $(C;Q_1,\cdots,Q_N)$ に対して以下の条件を満足する安定 N 点付曲線の族 $\mathfrak{F}=(\pi\colon Y\to B;s_1,\cdots,s_N)$ および点 $b\in B$ が存在する．

（1）　$\pi^{-1}(b)=(C;Q_1,\cdots,Q_N)$

（2）　族 $\mathfrak{F}$ は点 b で倉西族である．

このとき点 b の近傍でも族 $\mathfrak{F}$ は倉西族である．またこの倉西族 $\mathfrak{F}$ は点 b で普遍的である．

［証明］　曲線 C は通常2重点しかもたないので，C の普遍族 $f\colon X\to Z$ と点 $z\in Z$ が存在する．ただし $f^{-1}(z)=C$ であるように点 $z\in Z$ を選ぶ．そこで

$$\begin{aligned} X^{(N)} &= \overbrace{X\times_Z X\times_Z\cdots\times_Z X}^{N} \\ \Delta_{ij} &= \{(x_1,\cdots,x_N)\in X^{(N)}\mid x_i=x_j\},\quad i<j \\ B &= X^{(N)}\setminus\Bigl(\bigcup_{1\leqq i\leqq j\leqq N}\Delta_{ij}\cup\{X^{(N)}\text{ の特異点}\}\Bigr) \end{aligned}$$

とおく．さらに自然な写像 $p\colon B\to Z$ を使って

$$Y = X\times_Z B$$

とおき，2番目の因子への射影を $\pi\colon Y\to B$ とおく．点 $(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ に対して

$$s_i((x_1,x_2,\cdots,x_N))=(x_i,(x_1,x_2,\cdots,x_N))\in X\times_Z B=Y$$

とおくと族 $\mathfrak{F}=(\pi\colon Y\to B;s_1,\cdots,s_N)$ は $(C;Q_1,\cdots,Q_N)$ の普遍族であることが分かる．点 b は $b=(Q_1,\cdots,Q_N)\in B$ をとればよい．　■

さて安定 N 点付曲線の普遍族 $\mathfrak{F}=(\pi\colon Y\to B;s_1,\cdots,s_N)$ に対して

$$\Sigma = \{P \in Y \mid d\pi_P \colon T_PY \to T_{\pi(P)}B \text{ は全射ではない}\}$$
$$D = \pi(\Sigma)$$

とおき Σ を**臨界点の軌跡**(critical locus)，D を**臨界値の軌跡**(discriminant locus)と呼ぶことがある．上の構成法から次のことが示される．

系 4.9　種数 g の安定 N 点付曲線の普遍族 $\mathfrak{F} = (\pi\colon Y \to B; s_1, \cdots, s_N)$ に関して，$2g-2+N \geqq 1$ であれば次のことが成立する．

（1）　$\dim B = 3g-3+n$, $\dim Y = 3g-2+N$

（2）　$\pi\colon Y \to B$ の臨界点の軌跡 Σ は Y の余次元 2 の非特異複素部分多様体である．

（3）　$\pi\colon Y \to B$ の臨界値の軌跡 D は B の完全交叉因子である．　□

さて $\pi\colon Y \to B$ の臨界値の軌跡 D の定義イデアルを I_D と記すとき

$$\Theta_B(-\log D) = \{v \in \Theta_B \mid v(I_D) \subset I_D\}$$

と定義する．このとき次の事実が成立する．

定理 4.10　種数 g の安定 N 点付曲線の普遍族 $\mathfrak{F} = (\pi\colon Y \to B; s_1, \cdots, s_N)$ に対して $\mathcal{O}_B$ 加群の同型

$$\rho\colon \Theta_B(-\log D) \simeq R^1\pi_*\left(\Theta_{Y/B}\left(-\sum_{j=1}^{N} s_j(B)\right)\right)$$

が成立する．ただし

$$\Theta_{Y/B} = \underline{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega^1_{Y/B}, \mathcal{O}_Y)$$

とおいた．　□

さらに次の補題を後に使う．

補題 4.11　種数 g の安定 N 点付 “非特異” 代数曲線の普遍族 $\mathfrak{F} = (\pi\colon Y \to B; s_1, \cdots, s_N)$ の小平–Spencer 写像を

$$\rho\colon \Theta_B \longrightarrow R^1\pi_*\Theta_{Y/B}\left(-\sum_{j=1}^{N} s_j(B)\right)$$

と記す．このとき B 上の正則ベクトル場 X, Y に対して

$$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)] + X(\rho(Y)) - Y(\rho(X))$$

が成立する．ここで

$$\rho(X) = \{\theta_{\lambda\mu}\}, \quad \rho(Y) = \{\tau_{\lambda\mu}\}$$

と1コサイクルで表示するとき

$$X(\rho(Y))=\{X(\tau_{\lambda\mu})\},\quad Y(\rho(X))=\{Y(\theta_{\lambda\mu})\}$$

と定義する．

［証明］ B は十分小と仮定してよいので，一つの座標近傍であると仮定する．$\{U_i\}_{i\in I}$ を Y の十分細かい座標近傍による開被覆とする．$(z_1,\cdots,z_m)$ を B の座標，$(z_1,\cdots,z_m,\xi_i)$ を U_i の座標とする．さらに各 $1\leqq j\leqq N$ に対して U_j に $s_j(B)$ は含まれ，かつ $s_j(B)$ は $\xi_j=0$ で定義されていると仮定してよい．$U_i\cap U_j\neq\varnothing$ のとき

$$\xi_i=g_{ij}(\xi_j,z_1,\cdots,z_m)$$

と書ける．さて B 上のベクトル場

$$X=\sum_{i=1}^{m}a_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}$$

に対して無限小変換 $z=(z_1,\cdots,z_m)\mapsto z+\varepsilon_1X$ を

$$(z_1,\cdots,z_m)\longmapsto(z_1+\varepsilon_1a_1(z),\cdots,z_m+\varepsilon_1a_m(z))$$

と定義する．ここで ε_1 は双対数である．同様に他の双対数 ε_2 と B 上の正則ベクトル場 Y に対して無限小変換 $z\mapsto z+\varepsilon_2Y$ を同様に定義する．このとき

(4.4)
$$g_{ij}(\xi_j,z+\varepsilon_1X)=g_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_1l_{ij}(\xi_j,z)$$

(4.5)
$$g_{ij}(\xi_j,z+\varepsilon_2Y)=g_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_2m_{ij}(\xi_j,z)$$

と書き

$$\theta_{ij}=l_{ij}\frac{d}{d\xi_i},\quad\tau_{ij}=m_{ij}\frac{d}{d\xi_i}$$

とおくと $\{\theta_{ij}\},\{\tau_{ij}\}$ は $H^1(Y,\Theta_{Y/B})$ の元を定めることが容易に分かり，それぞれ $\rho(X),\rho(Y)$ を表す．(4.4)をさらに ε_2Y 方向へ無限小だけ動かすと

(4.6)
$$\begin{aligned}&g_{ij}(\xi_j,z+\varepsilon_2Y)+\varepsilon_1l_{ij}(\xi_j,z+\varepsilon_2Y)\\&\quad=g_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_2m_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_1l_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_1\varepsilon_2\left\{Y(l_{ij}(\xi_j,z))+m_{ij}\frac{dl_{ij}}{d\xi_i}\right\}\end{aligned}$$

となり(4.5)を ε_1X 方向へ無限小だけ動かすと同様にして

$$(4.7)\qquad g_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_1 l_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_2 m_{ij}(\xi_j,z)+\varepsilon_1\varepsilon_2\left\{X(m_{ij}(\xi_j,z))+l_{ij}\frac{dm_{ij}}{d\xi_i}\right\}$$

を得る．$\rho([X,Y])$ の $\dfrac{d}{d\xi_i}$ の係数は(4.7)から(4.6)を引いたものの $\varepsilon_1\varepsilon_2$ の係数と $U_i\cap U_j$ 上で一致することが簡単な計算により示すことができる．したがって

$$\begin{aligned}\rho([X,Y])&=\left\{l_{ij}\frac{dm_{ij}}{d\xi_i}-m_{ij}\frac{dl_{ij}}{d\xi_i}+X(m_{ij})-Y(l_{ij})\right\}\frac{d}{d\xi_i}\\&=[\rho(X),\rho(Y)]+X(\rho(Y))-Y(\rho(X))\end{aligned}$$

を得る． ∎

次に1次の無限小近傍を付けた族を構成しよう．安定 N 点付曲線の普遍族 $\mathfrak{F}=(\pi\colon Y\to B; s_1,\cdots,s_n)$ に対して

$$T_{s_j}Y=\bigcup_{y\in B}T_{s_j(y)}Y_y,\quad Y_y=\pi^{-1}(y)$$

とおく．ただし，$T_{s_j(y)}Y_y$ は点 $s_j(y)$ での Y の接ベクトルでファイバー Y_y に接するもの全体からなるベクトル空間である．自然な写像 $p_j\colon T_{s_j}Y\to B$ によって $T_{s_j}Y$ を B 上のベクトル束とみることができる．そこで

$$\begin{aligned}T_{s_j}^{\times}Y&=T_{s_j}Y\setminus\{0\text{ 切断}\}\\B^{(1)}&=T_{s_1}^{\times}Y\times_B\cdots\times_B T_{s_N}^{\times}Y\\Y^{(1)}&=Y\times_B B^{(1)}\end{aligned}$$

とおくと，正則切断 $s_j^{(1)}\colon B^{(1)}\to Y^{(1)}$ を

$$y\longmapsto(s_j(p^{(1)}(y)),\,y)$$

と定義することができる．ここで $p^{(1)}\colon B^{(1)}\to B$ は自然な写像である．さらに各点 $y=(v_1,\cdots,v_N)\in B^{(1)}$ に対して標準的な同型 $\mathcal{O}_{Y^{(1)}}/I_{s_j^{(1)}}\simeq\mathcal{O}_{B^{(1)}}$ を使って1次の無限小近傍

$$\begin{aligned}\eta_j^{(1)}\colon\ \mathcal{O}_{Y^{(1)}}/I^2_{s_j^{(1)}}&\longrightarrow\mathcal{O}_{B^{(1)}}[\xi]/(\xi^2)\\f&\longmapsto f(s_j^{(1)}(y))+v_j(f)(s_j^{(1)}(y))\xi\end{aligned}$$

を定義することができる．ここで $I_{s_j^{(1)}}$ は $Y^{(1)}$ における $s_j^{(1)}(B^{(1)})$ の定義イデアルであり，$v_j \in T_{s_j}^{\times}Y$ は微分作用素と考える．このとき $\mathfrak{F}^{(1)}=(\pi^{(1)}: Y^{(1)} \to B^{(1)}; s_1^{(1)},\cdots,s_N^{(1)};\eta_1^{(1)},\cdots,\eta_N^{(1)})$ は1次の無限小近傍をもつ安定 N 点付曲線の普遍族であることを容易に示すことができる．n 次の無限小近傍をもつ普遍族 $\mathfrak{F}^{(n)}=(\pi^{(n)}: Y^{(n)} \to B^{(n)}; s_1^{(n)},\cdots,s_N^{(n)};\eta_1^{(n)},\cdots,\eta_N^{(n)})$ は上の構成で $T_{s_j}Y$ のかわりに，ファイバー方向の n 次ジェット束 $T_{s_j}^{(n)}Y$ を使えばよい．この構成法から $n>m$ のとき自然な正則写像

$$P_{mn}\colon\ \mathfrak{F}^{(n)} \longrightarrow \mathfrak{F}^{(m)}$$

ができ，$(\mathfrak{F}^{(n)}, P_{mn})$ の射影的極限が形式近傍をもつ安定 N 点付曲線の普遍族になる．このように形式近傍を考えるときはモジュライ空間は有限次元複素解析空間の射影的極限として考える必要がある．共形場理論では後に述べるように1次の無限小近傍をもつ普遍族

$$\mathfrak{F}^{(1)}=\left(\pi^{(1)}: Y^{(1)} \to B^{(1)}; s_1^{(1)},\cdots,s_N^{(1)};\eta_1^{(1)},\cdots,\eta_N^{(1)}\right)$$

が重要である．モジュライ空間は $\mathfrak{F}^{(1)}$ をファイバーの自己同型群で割った商空間を張り合わせて構成できるが，特異点をもっているので，以下の議論では普遍族を主として使う．このとき系4.9より1次の無限小近傍をもった種数 g の安定 N 点付曲線の普遍族に関して，$2g-2+N \geqq 1$ のとき

$$\dim B^{(1)} = 3g-3+2N$$

$$\dim Y^{(1)} = 3g-2+2N$$

であり，$\pi^{(1)}: Y^{(1)} \to B^{(1)}$ の臨界点の軌跡 $\Sigma^{(1)}$ は $Y^{(1)}$ の余次元2の非特異複素部分多様体であり，臨界値の軌跡 $D^{(1)}$ は $B^{(1)}$ の完全交叉因子である．また自然な写像 $B^{(1)} \to B$ および $Y^{(1)} \to Y$ はそれぞれ B, Y 上の $\mathbb{C}^*$ 束であり，$n \geqq 1$ のとき，$B^{(n+1)} \to B^{(n)}$ および $Y^{(n+1)} \to Y^{(n)}$ はそれぞれ $B^{(N)}, Y^{(N)}$ 上の $\mathbb{C}$ 束であることが構成法より分かる．

§4.2　共形ブロック

この節では形式近傍をもつ安定 N 点付曲線に対して共形ブロックと呼ばれる有限次元ベクトル空間を構成する．この節以降の議論はすべての複素単

純 Lie 代数に適用できるが，単純 Lie 代数に不慣れな読者は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ で考えれば十分である．以下で必要となるアフィン Lie 代数とその表現に関して詳しくは Kac [49]を参照されたい．

(a) アフィン Lie 代数

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ と記す．$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ のルート系を Δ と記すと，ルート分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{g}_\alpha$$

が存在する．Δ から実数体上張られるベクトル空間を $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ と記す．$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ の基底を一つ固定して，$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ 上に辞書式順序を導入する．この順序によってルート系の分解 $\Delta=\Delta_+\sqcup\Delta_-$ ができる．Δ_+ の元は正ルート，Δ_- の元は負ルートと呼ばれる．$\mathfrak{h}^*=\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ 上 Δ が張るベクトル空間である．Cartan–Killing 型式の定数倍を $(\ ,\ )$ と記す．各元 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に対して

$$\lambda(H)=(H_\lambda,H)$$

がすべての元 $H\in\mathfrak{h}$ に対して成立するように元 $H_\lambda\in\mathfrak{h}$ を一意的に定めることができる．

ルート $\alpha\in\Delta$ に対して H_α を α に対応する**ルートベクトル**(root vector)と呼ぶ．

$\mathfrak{h}^*$ 上に内積を

$$(\lambda,\mu)=(H_\lambda,H_\mu)$$

で導入する．以下の議論ではでてくる定数を簡単にするために Cartan–Killing 型式の定数倍 $(\ ,\ )$ を正規化する．最長ルート θ，すなわちすべての単純ルート α に対して

$$\theta\in\Delta_+,\quad \theta+\alpha_i\notin\Delta$$

が成り立つルート θ に対して

$$(\theta,\,\theta)=2$$

が成り立つように規格化し，**正規化した Cartan–Killing 型式**(normalized Cartan-Killing form)と呼ぶ．Cartan–Killing 型式は

$$([X,\ Y],\ Z)+(Y,\ [X,\ Z])=0, \quad X,Y,Z\in\mathfrak{g}$$

を満足することに注意する.

複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ は 2×2 行列

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

を基底とする Lie 代数であり

$$[H,E]=2E,\quad [H,F]=-2F,\quad [E,F]=H$$

が成立する. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ は H で張られる. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のルート系 Δ は $\alpha(H)=2$ となる $\alpha\in\{\mathfrak{h}\}^*$ を使うと $\Delta=\{\alpha,-\alpha\}$ である. 上の結果より $\mathfrak{g}_\alpha=\mathbb{C}E$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}=\mathbb{C}F$ である. また $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の正規化した Cartan–Killing 型式 $(\ ,\ )$ は

$$(X,Y)=\mathrm{Tr}(XY),\quad X,Y\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$$

で与えられる. $H_\alpha=H$, $H_{-\alpha}=-H$ であることは直ちに分かる. $\mathfrak{h}^*$ の内積 $(\ ,\ )$ は

$$(\lambda,\mu)=(H_\lambda,H_\mu)$$

と定義された. $(\alpha,\alpha)=2$ であることに注意する.

再び, 一般の複素単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を考えよう. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 1 変数形式的 Laurent 級数体 $\mathbb{C}((\xi))$ を使って

(4.8) $$\widehat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}((\xi))\oplus\mathbb{C}\cdot c$$

のとき $\widehat{\mathfrak{g}}$ に Lie 代数の構造を次のように入れる.

(1)　c は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の中心に属する.

(2)　$X,Y\in\mathfrak{g}$, $f(\xi),g(\xi)\in\mathbb{C}((\xi))$ に対して

(4.9)
$$[X\otimes f(\xi),\ Y\otimes g(\xi)]=[X,Y]\otimes f(\xi)g(\xi)+(X,Y)\operatorname*{Res}_{\xi=0}(g(\xi)f'(\xi)d\xi)\cdot c$$

(1), (2)によって $\widehat{\mathfrak{g}}$ が無限次元 Lie 代数の構造をもつことを簡単に確かめることができる.

さて $X\in\mathfrak{g}$, $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$X(n)=X\otimes\xi^n$$

と定義する．特に写像

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \longrightarrow & \widehat{\mathfrak{g}} \\ X & \longmapsto & X(0) = X \otimes 1 \end{array}$$

によって $\mathfrak{g}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数とみることができる．以下 $X(0)$ を X と略記する．

アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ は(4.8)の定義で通常は $\mathbb{C}((\xi))$ のかわりに Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[\xi,\xi^{-1}]$ を使うが，以下の議論では $\mathbb{C}((\xi))$ を使うことが大切になる．

さて共形ブロックを定義するためには $\widehat{\mathfrak{g}}$ の**レベル l の積分可能最高ウェイト表現**(integrable highest weight representation of level l)を考察することが本質的である．そのためにまず $\mathfrak{g}$ の有限次元表現は完全可約であり，有限次元既約表現は**最高ウェイト**(highest weight)で決まることに注意しよう．

ここでは $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現について復習しておく．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現 V は左 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 加群であり，かつ

$$He = \lambda(H)e, \quad Ee = 0$$

となる 0 でないベクトル $e \in V$ が定数倍を除いて唯一つ存在する．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を表現の最高ウェイト，e を**最高ウェイトベクトル**(highest weight vector)という．$\lambda = \dfrac{k}{2}\alpha,\ k=0,1,2,\cdots$ の形をしていることが知られている．

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の 2×2 行列により $\mathbb{C}^2$ への自然な作用では

$$H\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となるので，この表現の最高ウェイトは $\dfrac{1}{2}\alpha$ である．最高ウェイト $\dfrac{k}{2}\alpha$ の既約表現は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^2$ への左からの自然な作用の k 次の対称積 $S^k\mathbb{C}^2$ で与えられることが知られている．

再び，一般の複素単純 Lie 代数を考察する．以下では表現という言葉より，$\mathfrak{g}$ 加群という言葉を使う方が便利である．積分可能表現を定式化するために**レベル**と呼ばれる正整数 l を一つ選び，以下固定し P_l を

$$P_l = \{\lambda \in P_+ \mid 0 \leqq (\theta,\lambda) \leqq l\}$$

と定義する．ここで P_+ は**支配的整ウェイト**(dominant integral weight)であ

る．$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のときは

$$P_l=\left\{0,\frac{1}{2}\alpha,\alpha,\frac{3}{2}\alpha,\cdots,\frac{l}{2}\alpha\right\} \tag{4.10}$$

となる．さらに $\widehat{\mathfrak{g}}$ の部分 Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_+$, $\widehat{\mathfrak{g}}_-$ を

$$\widehat{\mathfrak{g}}_+=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[[\xi]]\xi,\quad \widehat{\mathfrak{g}}_-=\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[\xi^{-1}]\xi^{-1}$$

と定義する．

定理 4.12　各 $\lambda\in P_l$ に対して以下の性質をもつ左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 $\mathcal{H}_\lambda$ が同型を除いて唯一つ存在する．

（1）　$V_\lambda=\{|v\rangle\in\mathcal{H}_\lambda\,|\,\widehat{\mathfrak{g}}_+|v\rangle=0\}$ は最高ウェイト λ の既約左 $\mathfrak{g}$ 加群である．

（2）　$\widehat{\mathfrak{g}}$ の中心元 c は $\mathcal{H}_\lambda$ 上に $l\cdot id$ で作用する．

（3）　$\mathcal{H}_\lambda$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ 上 V_λ から生成され，これらの元の間の関係は式

$$X_\theta(-1)^{l-(\theta,\lambda)+1}|\lambda\rangle=0 \tag{4.11}$$

から生成される．ここで $|\lambda\rangle$ は V_λ の最高ウェイトベクトルであり，θ は最長ルート，$X_\theta\in\mathfrak{g}_\theta$ である．言い換えると

$$\mathcal{H}_\lambda=U(\widehat{\mathfrak{g}}_-)V_\lambda/U(\widehat{\mathfrak{g}}_-)X_\theta(-1)^{l-(\theta,\lambda)+1}|\lambda\rangle$$

が成立する．□

この $\mathcal{H}_\lambda$ をレベル l の積分可能最高ウェイト λ の左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群という．(3)から $\mathcal{H}_\lambda$ の構造が分かり，左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造は(1), (2), (3)によって与えられる．詳細については Kac [49]の(10.4.6)を参照していただきたい．さらに積分可能表現は次の定理によって特徴づけることができる．

定理 4.13　定理 4.12 の条件(1), (2)を満足する左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 $\mathcal{H}$ が積分可能 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群であるための必要十分条件は任意の $|\varphi\rangle\in\mathcal{H}$, $\alpha\in\Delta$ と任意の整数 n に対して，$k\geqq m$ であれば

$$X_\alpha^k|\varphi\rangle=0,\quad X_{-\alpha}(n)^k|\varphi\rangle=0$$

が成立するような正整数 m が存在することである．ここで正整数 m は $|\varphi\rangle$ によって値が変わってよい．□

上の定理の事実を $X_\alpha(n)$ は $\mathcal{H}$ に**局所べき零的**(locally nilpotent)に作用するという．また，一般に左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 $\mathcal{H}$ に対して $\mathcal{H}$ が $\widehat{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}+\mathbb{C}c$ の固有空間の直和に分解し，$X_\alpha(n)$, $X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ が局所べき零的に作用し，中心 c が $l\cdot id$ で作

用するとき(実際は，もう少し弱く X_α，$\alpha\in\Delta$，および $X_{-\theta}(1)$, $X_\theta(-1)$ が局所べき零的に作用すれば十分)，レベル l の積分可能 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群という．レベル l の積分可能 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群は既約な積分可能加群 $\mathcal{H}_\lambda$, $\lambda\in P_l$ の有限個の直和に分解できることが知られている．詳しくは Kac [49] の第 9 章を参照されたい．

(b)　菅原型式

正規順序(normal ordering) $\circ\atop\circ$ $\circ\atop\circ$ を

$$
{}^\circ_\circ X(n)Y(m){}^\circ_\circ=\begin{cases} X(n)Y(m), & n<m \\ \dfrac{1}{2}(X(n)Y(m)+Y(m)X(n)), & n=m \\ Y(m)X(n), & n>m \end{cases}
$$

と定義する．(4.9)より $n>m$ であれば

$$
{}^\circ_\circ X(n)X(m){}^\circ_\circ=X(n)X(m)+m\delta_{n+m,0}(X,X)\cdot c \tag{4.12}
$$

となり，$n+m\neq 0$ であれば

$$
{}^\circ_\circ X(n)X(m){}^\circ_\circ=X(n)X(m)
$$

であることが分かる．

$X\in\mathfrak{g}$ に対して形式的に

$$
X(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}X(n)z^{-n-1} \tag{4.13}
$$

と定義し，X が定める**カレント**(current)と呼ぶ．さらに，この記法を使って**エネルギー運動量テンソル**(energy-momentum tensor) $T(z)$ を

$$
T(z)=\frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}{}^\circ_\circ J^a(z)J^a(z){}^\circ_\circ \tag{4.14}
$$

と定義する．ここで正規化した Cartan–Killing 型式 (,) に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底を $\{J^a\}_{1\leqq a\leqq \dim\mathfrak{g}}$ と記した．また g^* は双対 Coxeter 数である．${}^\circ_\circ J^a(z)J^a(z){}^\circ_\circ$ は $J^a(z)J^a(z)$ を形式的に z のべき級数として計算して各係数に正規順序 $\circ\atop\circ$ $\circ\atop\circ$ を施して得られるべき級数を意味する．特に，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ のときは，$J^1=\dfrac{H}{\sqrt{2}}$，$J^2=\dfrac{E+F}{\sqrt{2}}$，$J^3=\dfrac{\sqrt{-1}\,(E-F)}{\sqrt{2}}$ ととることができるから

$$T(z) = \frac{1}{2(2+l)}\left\{\frac{1}{2}\,{}^{\circ}_{\circ}H(z)H(z){}^{\circ}_{\circ} + {}^{\circ}_{\circ}E(z)F(z){}^{\circ}_{\circ} + {}^{\circ}_{\circ}F(z)E(z){}^{\circ}_{\circ}\right\}$$

と書き直すことができる．

さて，

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$$

と記すと(4.14)より

$$L_n = \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} {}^{\circ}_{\circ}J^a(m)J^a(n-m){}^{\circ}_{\circ} \tag{4.15}$$

と記すことができる．L_n は無限和であるがレベル l の積分可能最高ウェイト左 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群 $\mathcal{H}_\lambda$ に作用することができる．これは定理 4.13 より各元 $|\varphi\rangle\in\mathcal{H}_\lambda$ と $X\in\mathfrak{g}$ に対して正整数 n がある数 M 以上であれば $X(n)|\varphi\rangle=0$ が常に成立するからである．もちろん M は $|\varphi\rangle$ と X に依存して決まる．2次の項 ${}^{\circ}_{\circ}J^a(m)J^a(n-m){}^{\circ}_{\circ}$ は m が十分大きければ $J^a(n-m)J^a(m)$ となり，$-m$ が十分大きければ $J^a(m)J^a(n-m)$ となり(4.15)の表示で明らかなように $|\varphi\rangle\in\mathcal{H}_\lambda$ に対して $L_n|\varphi\rangle=\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}^{\circ}_{\circ}J^a(m)J^a(n-m){}^{\circ}_{\circ}|\varphi\rangle$ の項のうち0でないものは有限個にすぎない．ただし0でない個数は $|\varphi\rangle$ によって違ってくることに注意する．

ところで(4.12)より $n\neq 0$ であれば L_n の定義に正規順序 ${}^{\circ}_{\circ}$ ${}^{\circ}_{\circ}$ は不要である．L_0 の定義にだけ正規順序を必要とする．L_0 の定義に正規順序を導入しなければ $\mathcal{H}_\lambda$ への作用は無限和が出てきて意味をなさなくなる．

$L_n, X(m)$ を $\mathcal{H}_\lambda$ への作用素と考えると次の重要な事実が成り立つ．

命題 4.14　任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$[L_n, X(m)] = -mX(n+m) \tag{4.16}$$

が成立する．さらに

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c_v}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \tag{4.17}$$

が成立する．ここで

$$c_v = \frac{l \dim \mathfrak{g}}{g^* + l}$$

である．また g^* は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である． □

この命題の(4.17)の交換関係をもつ Lie 代数 $\{L_n\}$ を**中心荷電**(central charge) $c_v = \dfrac{l \dim \mathfrak{g}}{l + g^*}$ の **Virasoro 代数**(Virasoro algebra)という．

［証明］　この命題の(4.16)を仮定すると(4.17)は次のようにして示すことができる．(4.16)より

(4.18)

$$\begin{aligned}[J^a(k)J^a(n-k),\, L_m] &= J^a(k)[J^a(n-k),\, L_m] + [J^a(k),\, L_m]J^a(n-k) \\ &= (n-k)J^a(k)J^a(n+m-k) + kJ^a(k+m)J^a(n-k)\end{aligned}$$

が成立する．したがって $n+m \neq 0$, $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] &= \frac{1}{2(g^*+l)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} [J^a(k)J^a(n-k),\, L_m] \\ &= \frac{1}{2(g^*+l)} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (n-k)J^a(k)J^a(n+m-k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} kJ^a(k+m)J^a(n-k) \right\} \\ &= \frac{1}{2(g^*+l)} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (n-k)J^a(k)J^a(n+m-k) \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (j-m)J^a(j)J^a(n+m-j) \right\} \\ &= \frac{1}{2(g^*+l)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (n-m)J^a(k)J^a(n+m-k) \\ &= (n-m)L_{n+m}\end{aligned}$$

を得る．$n=0$, $m \neq 0$ のときも同様の議論により，同様の結果を得る．そこで $n+m=0$, $n \neq 0$ の場合を考える．簡単のため $n>0$ と仮定する．

$$L_n = \frac{1}{2(g^*+l)} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{n} J^a(k)J^a(n-k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} J^a(n-k)J^a(k) \right\}$$

と書けるので(4.18)より

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] = \frac{1}{2(g^*+l)} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} \Bigg[\sum_{k=-\infty}^{n} \{&(n-k)J^a(k)J^a(-k) \\ &+ kJ^a(-n+k)J^a(n-k)\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=n+1}^{\infty}\{kJ^a(n-k)J^a(-n+k)+(n-k)J^a(-k)J^a(k)\}\Bigg]\\
&=\frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\left\{\sum_{j=-n}^{\infty}(n+j)J^a(-j)J^a(j)+\sum_{j=0}^{\infty}(n-j)J^a(-j)J^a(j)\right.\\
&\left.+\sum_{j=1}^{\infty}(n+j)J^a(-j)J^a(j)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(n-k)J^a(-k)J^a(k)\right\}\\
&=\frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\left\{2n\sum_{j=0}^{\infty}J^a(-j)J^a(j)+\sum_{j=-n}^{-1}(n+j)J^a(-j)J^a(j)\right.\\
&\left.+2n\sum_{j=1}^{\infty}J^a(-j)J^a(j)-\sum_{j=1}^{\infty}(n-J)J^a(-j)J^a(j)\right\}\\
&=\frac{2n}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\left\{2\sum_{j=1}^{\infty}J^a(-j)J^a(j)+J^a(0)J^a(0)\right\}\\
&+\frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{j=1}^{n}(n-j)(J^a(j)J^a(-j)-J^a(-j)J^a(j))\\
&=2nL_0+\frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{j=1}^{n}(n-j)jl\\
&=2nL_0+\frac{l\dim\mathfrak{g}(n^3-n)}{12(g^*+l)}
\end{aligned}
$$

を得る. ∎

系 4.15

$$
[L_n, X(z)] = z^n\left(z\frac{d}{dz}+n+1\right)X(z)
$$
□

$X\in\mathfrak{g}$, $f=f(z)\in\mathbb{C}((z))$ および $\underline{l}=l(z)\frac{d}{dz}\in\mathbb{C}((z))\frac{d}{dz}$ に対して以下の記号を使う.

$$
X[f]=\operatorname*{Res}_{z=0}(X(z)f(z)dz)
$$

$$
T[\underline{l}]=\operatorname*{Res}_{z=0}(T(z)l(z)dz)
$$

特に

$$
L_0=T\left[\xi\frac{d}{d\xi}\right] \tag{4.19}
$$

となる.

補題 4.16　$X[f]$ と $T[\underline{l}]$ は $\mathcal{H}_\lambda$ に作用し

$$X[f] = X \otimes f(\xi)$$

$$[T[\underline{l}],\, X[f]] = -X[\underline{l}(f)]$$

$$[T[\underline{l}],\, T[\underline{m}]] = -T[[\underline{l},\, \underline{m}]] + \frac{c_v}{12} \operatorname*{Res}_{z=0}(l''' m dz) \tag{4.20}$$

［証明］　ここでは3番目の式(4.20)だけ証明しよう.

$$\underline{l} = l(\xi)\frac{d}{d\xi}, \qquad l(\xi) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} l_n \xi^{n+1}$$

$$\underline{m} = m(\xi)\frac{d}{d\xi}, \qquad m(\xi) = \sum_{n=-n_0}^{\infty} m_n \xi^{n+1}$$

とおく．すると

$$\begin{aligned}[T[\underline{l}], T[\underline{m}]] &= \sum_{k,j} [l_j L_j, m_k L_k] \\ &= \sum_{k,j} l_j m_k [L_j, L_k] \\ &= \sum_{k,j} l_j m_k \left\{ (j-k) L_{j+k} + \frac{c_v}{12}(j^3 - j)\delta_{j+k,0} \right\}\end{aligned}$$

一方

$$[\underline{l}, \underline{m}] = \sum_n \left(\sum_{j+k=n} l_j m_k (k-j) \right) \xi^{n+1} \frac{d}{d\xi}$$

が成り立つ．さらに

$$\sum_{k,j} l_j m_k (j^3 - j)\delta_{j+k,0} = \sum_j l_j m_{-j}(j^3 - j) = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(l'''(z) m(z) dz\right)$$

が成り立つので求める結果が得られる. ∎

次に $\mathcal{H}_\lambda$ に増加フィルター $\{F_\bullet\}$ を導入しよう．そのために各非負整数 d に対して $\mathcal{H}_\lambda$ の部分空間 $\mathcal{H}_\lambda(d)$ を

$$\mathcal{H}_\lambda(d) = \{|v\rangle \in \mathcal{H}_\lambda \mid L_0|v\rangle = (d + \Delta_\lambda)|v\rangle\} \tag{4.21}$$

と定義する．ここで

$$\Delta_\lambda = \frac{(\lambda,\lambda)+(\lambda,\theta)}{2(g^*+l)}$$

とおいた．式(4.15)より L_0 は V_λ 上で $|v\rangle\in V_\lambda$ に対して

$$L_0|v\rangle = \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}} J^aJ^a|v\rangle = \Delta_\lambda|v\rangle$$

と作用する．すなわち L_0 の V_λ 上への作用は Casimir 作用素としての作用と一致する．また，このことから正整数 m と $|v\rangle\in V_\lambda$ に対して

$$\begin{aligned} L_0X(-m)|v\rangle &= X(-m)L_0|v\rangle+mX(-m)|v\rangle \\ &= (\Delta_\lambda+m)X(-m)|v\rangle \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．したがって $X(-m)|v\rangle\in F_m\mathcal{H}_\lambda$ であることが分かる．同様に正整数 $m_1,\cdots,m_k$ に対して

$$\begin{aligned} &L_0X_1(-m_1)\cdots X_k(-m_k)|v\rangle \\ &\quad = (\Delta_\lambda+m_1+\cdots+m_k)X_1(-m_1)\cdots X_k(-m_k)|v\rangle, \quad |v\rangle\in V_\lambda \end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．このことより，$\mathcal{H}_\lambda(d)$ は有限次元ベクトル空間であり

$$\mathcal{H}_\lambda = \bigoplus_{d=0}^{\infty}\mathcal{H}_\lambda(d)$$

と書けることが分かる．負整数 $-d$ に対しては

$$\mathcal{H}_\lambda(-d) = \{0\}$$

とおく．以上の準備のもとにフィルター $\{F_p\mathcal{H}_\lambda\}$ を

$$F_p\mathcal{H}_\lambda = \sum_{d=0}^{p}\mathcal{H}_\lambda(d) \tag{4.22}$$

と定義する．このフィルターは増加フィルターである．

さて

$$\mathcal{H}_\lambda^\dagger(d) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda(d),\mathbb{C}) \tag{4.23}$$

とおき，$\mathcal{H}_\lambda$ の双対空間 $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ を

$$\mathcal{H}_\lambda^\dagger = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_\lambda,\mathbb{C}) = \prod_{d=0}^{\infty}\mathcal{H}_\lambda^\dagger(d) \tag{4.24}$$

と定義する．この定義により $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ は右 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群とみることができる．減少フィ

ルター $\{F^p\mathcal{H}_\lambda^\dagger\}$ は

$$F^p\mathcal{H}_\lambda^\dagger = \prod_{d \geqq p} \mathcal{H}_\lambda^\dagger(d) \tag{4.25}$$

で定義される．このとき完全対写像(perfect pairing)

$$\langle\ |\ \rangle\colon\ \mathcal{H}_\lambda^\dagger \times \mathcal{H}_\lambda \longrightarrow \mathbb{C} \tag{4.26}$$

が定義できる．この対写像は各 $a \in \widehat{\mathfrak{g}}$ に対して

$$\langle u|av\rangle = \langle ua|v\rangle, \quad \langle u| \in \mathcal{H}_\lambda^\dagger\ |v\rangle \in \mathcal{H}_\lambda$$

を満足する．

フィルター $\{F_p\}, \{F^p\}$ は $\mathcal{H}_\lambda$ および $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ 上に位相を定義する．この位相によって $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ は完備であり，最低ウェイト λ をもつ積分可能最高ウェイト右 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の完備化になっていることが分かる．

$$V_\lambda^\dagger = \{\langle v| \in \mathcal{H}_\lambda^\dagger \mid \langle v|\widehat{\mathfrak{g}}_- = 0\}$$

とおくと $V_\lambda^\dagger = \mathcal{H}_\lambda^\dagger(0)$ であり，$V_\lambda^\dagger$ は最低ウェイト λ をもつ既約右 $\mathfrak{g}$ 加群である．最低ウェイト λ をもつ積分可能最高ウェイト右 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群は $\widehat{\mathfrak{g}}_+$ 上 $V_\lambda^\dagger$ で生成され，これらの元の間の関係は式

$$\langle\lambda|X_{+\theta}(-1)^{l-(\theta,\lambda)+1} = 0$$

から生成される．

補題 4.17

$$\begin{aligned}
X(m)\mathcal{H}_\lambda(d) &\subset \mathcal{H}_\lambda(d-m) \\
L_m\mathcal{H}_\lambda(d) &\subset \mathcal{H}_\lambda(d-m) \\
\mathcal{H}_\lambda^\dagger(d)X(m) &\subset \mathcal{H}_\lambda^\dagger(d+m) \\
\mathcal{H}_\lambda^\dagger(d)L_m &\subset \mathcal{H}_\lambda^\dagger(d+m)
\end{aligned}$$

□

次の命題は後述の定理 4.34(1)からの帰結である．

命題 4.18 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ のルートベクトル $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$\alpha \in \Delta$ および任意の元 $f(\xi) \in \mathbb{C}((\xi))$ に対して $X_\alpha \otimes f(\xi)$ の $\mathcal{H}_\lambda$ および $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ への作用は局所べき零的である． □

さて $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ 上に左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造を

$$X(n)\langle\Phi| := -\langle\Phi|X(-n)$$

で導入する．これが実際に $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ 上に左 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群の構造を入れることは容易に分かる．

そこで左 $\mathfrak{g}$ 加群 $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ と $\mathcal{H}_{\lambda^\dagger}$ の関係を調べよう．

単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の最長元 w，言い換えれば $w(\Delta_+)=\Delta_-$ となる元 w をとり，元 $\lambda\in P_l$ に対して

$$\lambda^\dagger = -w(\lambda)$$

とおく．$\lambda^\dagger$ は $-\lambda^\dagger$ が左 $\mathfrak{g}$ 加群 V_λ の最低ウェイトであるとしても特徴づけることができる．$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合は，$\lambda^\dagger=\lambda$ となることが分かる．しかし一般の Lie 代数では $\lambda^\dagger$ と λ とは異なっている．

さて，$V_\lambda\otimes V_\lambda^\dagger$ を対角作用，すなわち

$$X(|u\rangle\otimes|v\rangle) = X(|u\rangle)\otimes|v\rangle + |u\rangle\otimes X(|v\rangle)$$

なる作用で左 $\mathfrak{g}$ 加群と考えると，1 次元の自明な $\mathfrak{g}$ 加群 $\mathbb{C}|0_{\lambda,\lambda^\dagger}\rangle$ を含んでいる．たとえば $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合は最高ウェイト $\mu=\dfrac{m}{2}\alpha$ の既約左 $\mathfrak{g}$ 加群に関しては最高ウェイトベクトル e_0 は $He_0=me_0$ を満足する．そこで

$$e_j = \frac{1}{j!}F^j e_0, \quad j=1,2,\cdots,m$$

とおくと

$$|0_{\mu,\mu^\dagger}\rangle := \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\frac{j!(m-j)!}{m!}e_j\otimes e_{m-j}$$

が求める自明な左 $\mathfrak{g}$ 部分加群の基底である．以下では $V_\lambda\otimes V_\lambda^\dagger$ の自明な $\mathfrak{g}$ 加群の基底 $|0_{\lambda,\lambda^\dagger}\rangle$ が大切な役割をする．

補題 4.19　双線型対写像(bilinear pairing)

$$(\ |\ ) :\ \mathcal{H}_\lambda\times\mathcal{H}_{\lambda^\dagger} \longrightarrow \mathbb{C}$$

が存在する．この対写像は定数倍を除いて一意的に定まり，$X\in\mathfrak{g}$, $n\in\mathbb{Z}$, $|u\rangle\in\mathcal{H}_\lambda$, $|v\rangle\in\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ に対して

$$(X(n)u|v)+(u|X(-n)v)=0$$

が成り立つ．さらに $d\neq d'$ のとき $(\ |\ )$ は $\mathcal{H}_\lambda(d)\times\mathcal{H}_{\lambda^\dagger}(d')$ 上で零である．また，この対写像での $|0_{\lambda,\lambda^\dagger}\rangle$ の値を 1 と正規化すると $(\ |\ )$ は一意的に定まる．

［証明］　$V_\lambda\otimes V_{\lambda^\dagger}$ を対角作用で左 $\mathfrak{g}$ 加群と考えたときの自明な $\mathfrak{g}$ 加群の基

底 $|0_{\lambda,\lambda^\dagger}\rangle$ を一つ固定する．$\mathbb{C}|0_{\lambda,\lambda^\dagger}\rangle$ の双対空間が $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda \otimes V_{\lambda^\dagger}, \mathbb{C})$ であるので $V_\lambda \otimes V_{\lambda^\dagger}$ 上の双線型型式 $(\ |\ ) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda \otimes V_{\lambda^\dagger}, \mathbb{C})$ が定数倍を除いて一意的に存在する．このとき

$$(X(n)u|v) + (u|X(-n)v) = 0, \quad u \in V_\lambda,\ v \in V_{\lambda^\dagger}$$

が成立している．また $(\ |\ )$ は $|0_{\lambda,\lambda^\dagger}\rangle$ の値を 1 とすることで一意的に定まる．そこで条件を満足する双線型型式 $(\ |\ ) \in \mathrm{Hom}(F_p\mathcal{H}_\lambda \otimes F_p\mathcal{H}_\lambda^\dagger, \mathbb{C})$ が存在したと仮定する．このとき，元

$$X(-m)|u\rangle \in F_{p+1}\mathcal{H}_\lambda, \quad |u\rangle \in F_p\mathcal{H}_\lambda, \quad m > 0$$

と元 $|v\rangle \in F_{p+1}\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ に対して $(X(-m)u|v)$ を

$$(X(-m)u|v) = -(u|X(m)v) \tag{4.27}$$

と定義する．$X(m)|v\rangle \in F_{p+1-m}\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ であるのでこの定義式の右辺は仮定よりすでに定義されている．このようにして，条件を満足する双線型型式 $(\ |\ )$ が定義できることが分かる． ∎

系 4.20　$|0_{\lambda,\lambda^\dagger}\rangle$ を固定すると左 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群としての標準的な同型

$$\mathcal{H}_\lambda^\dagger \simeq \widehat{\mathcal{H}_\lambda^\dagger}$$

が一意的に存在する．ここで $\widehat{\mathcal{H}_\lambda^\dagger}$ はフィルター $\{F_p\}$ に関する $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ の完備化である． □

(c)　共形ブロック

ここでは，今までの準備のもとに形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X} = (C; Q_1, Q_2, \cdots, Q_N; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N)$ に対して共形ブロック $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(\mathfrak{X})$ とその双対空間 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ を定義する．ここで $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)$，$\lambda_j \in P_l$ である．そのためにアフィン Lie 代数の定義を以下のように少し拡張する．

定義 4.21　複素数体上の単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $\hat{\mathfrak{g}}_N$ を

$$\hat{\mathfrak{g}}_N = \bigoplus_{j=1}^{N} \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((\xi_j)) \oplus \mathbb{C}c$$

と定義し，交換子積を

(4.28)

$$[(X_j\otimes f_j),(Y_j\otimes g_j)]=([X_j,Y_j]\otimes f_jg_j)+c\sum_{j=1}^{N}(X_j,Y_j)\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(g_jdf_j)$$

と定義する．ここで (a_j) は $(a_1,a_2,\cdots,a_N)$ を意味し，c は Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ の中心の元であると定義する． □

また，形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,Q_2,\cdots,Q_N;\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)$ に対して

$$\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})=\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$$

と定義する． 点 Q_j に関して§4.1(a)の条件(Q)が満たされれば自然な埋め込み

(4.29)　　$$t:\ H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)\hookrightarrow\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))$$

が存在する．この埋め込みによって以下 $H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ を $\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))$ の部分空間とみなす．代数曲線上の1次有理型微分型式の留数の和は0であることに注意すると次の補題は直ちに従う．

補題 4.22　$\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ は $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ の部分 Lie 代数である． □

さて，非負整数 l を以下一つ固定して考える．各 $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)\in(P_l)^N$ に対して左 $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ 加群 $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ および右 $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ 加群 $\mathcal{H}^\dagger_{\vec{\lambda}}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}=\mathcal{H}_{\lambda_1}\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{H}_{\lambda_N}$$
$$\mathcal{H}^\dagger_{\vec{\lambda}}=\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_1}\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\cdots\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_N}$$

ただし $\widehat{\otimes}$ は完備テンソル積を意味する．すなわち，$\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_1}\otimes_{\mathbb{C}}\cdots\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_N}$ のフィルターから定まる位相による完備化が $\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_1}\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\cdots\widehat{\otimes}_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^\dagger_{\lambda_N}$ である．このとき，$X_j\in\mathfrak{g}$，$f(\xi_j)\in\mathbb{C}((\xi_j))$ に対して $X_j[f_j]$ の $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ への作用 ρ_j を

$$\rho_j(X_j[f_j])|v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle=|v_1\otimes\cdots\otimes v_{j-1}\otimes(X_j[f_j])v_j\otimes v_{j+1}\otimes\cdots\otimes v_N\rangle$$

と定義する．ここで $|v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle$ は $|v_1\rangle\otimes\cdots\otimes|v_N\rangle$，$|v_j\rangle\in\mathcal{H}_{\lambda_j}$ を意味する．このとき $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ 上への左 $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ 加群としての作用は

$$(X_1\otimes f_1,\cdots,X_N\otimes f_N)|v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle = \sum_{j=1}^{N}\rho_j(X_j[f_j])|v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle$$

で与える．同様にして $\mathcal{H}^\dagger_{\vec{\lambda}}$ への右 $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ 加群としての作用は

$$\langle u_1\otimes\cdots\otimes u_N|(X_1\otimes f_1,\cdots,X_N\otimes f_N) = \sum_{j=1}^{N}\langle u_1\otimes\cdots\otimes u_N|\rho_j(X_j[f_j])$$

で与える．したがって $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ の部分 Lie 代数として $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ および $\mathcal{H}^\dagger_{\vec{\lambda}}$ 上への $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ の作用は

$$(X\otimes f)|v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle = \sum_{j=1}^{N}\rho_j(X\otimes t_j(f))|v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle$$

$$\langle u_1\otimes\cdots\otimes u_N|(X\otimes f) = \sum_{j=1}^{N}\langle u_1\otimes\cdots\otimes u_N|\rho_j(X\otimes t_j(f))$$

で与えられる．(4.26)の完全対写像 $\langle\ |\ \rangle$ によって完全対写像

(4.30)

$$\begin{array}{cccc}\langle\ |\ \rangle: & \mathcal{H}^\dagger_{\vec{\lambda}}\times\mathcal{H}_{\vec{\lambda}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\langle u_1\otimes\cdots\otimes u_N|,|v_1\otimes\cdots\otimes v_N\rangle) & \longmapsto & \langle u_1|v_1\rangle\langle u_2|v_2\rangle\cdots\langle u_N|v_N\rangle\end{array}$$

が与えられる．この完全対写像は $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ 不変である．

$$\langle\Psi(X_j\otimes f_j)|\Phi\rangle = \langle\Psi|(X_j\otimes f_j)\Phi\rangle$$

さていよいよ共形ブロックを定義しよう．

定義 4.23　形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,Q_2,\cdots,Q_N;\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)$ に関して§4.1(a)の条件(Q)が満足される，すなわち C の各既約成分上に少なくとも 1 点 Q_j がのっていると仮定する．ベクトル空間

(4.31)　$$\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}/\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}},\mathbb{C})$$

を $\mathfrak{X}$ の**ラベル**(label) $\vec{\lambda}$ の**共形ブロック**(conformal block)と呼ぶ．**真空の空間**(space of vacua)と呼ぶこともある．また，

(4.32)　$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) = \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}/\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

を**双対共形ブロック**(dual conformal block)と呼ぶ．　□

この定義では点 $\{Q_j\}$ の配置に関して条件(Q)がついているが，後にこの条件は本質的に不要であることを示す．また，双対の定義が通常と逆になっ

ているように思われるが，これは物理にちなんで部分空間の方を主として考えることに起因している．共形ブロックの定義から直ちに次の補題が従う．

補題 4.24　共形ブロックは

$$\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) = \{\langle\Psi| \in \mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}} \mid \langle\Psi|\,\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) = 0\} \tag{4.33}$$

と定義することができる．□

条件

$$\langle\Psi|\,\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}) = 0$$

を**ゲージ条件**(gauge condition)と呼ぶ．また(4.30)から完全対写像

$$\langle\ |\ \rangle\colon\ \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) \times \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathbb{C} \tag{4.34}$$

が存在することが分かる．さて定義から直接は明らかでないが共形ブロックが有限次元であることが証明できる．

定理 4.25　$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ と $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ は有限次元ベクトル空間である．□

この定理の証明のために言葉を少し用意する．

必ずしも可換とは限らない単位元1をもつ環 R が増大フィルター $\{R_n = F_n(R)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ をもち，積に関して

$$R_p \cdot R_q \subset R_{p+q}$$

が任意の p, q に対して成立し，かつ $1 \in R_0$ であるとき R を**フィルター環**(filtered ring)と呼ぶ．このとき逐次商

$$\mathrm{Gr}(R) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_k\, R, \quad \mathrm{Gr}_k\, R = R_k/R_{k-1}$$

は**次数環**(graded ring)になる．以下，$\mathrm{Gr}(R)$ が可換環である場合を考える．このとき $f \in \mathrm{Gr}_p\, R$, $g \in \mathrm{Gr}_q\, R$ の元に対して $\mathrm{Gr}_p\, R$, $\mathrm{Gr}_q\, R$ への像がそれぞれ f, g となる $x \in R_p$, $y \in R_q$ を選ぶと $xy - yx \in R_{p+q-1}$ が成立する．$xy - yx$ の R_{p+q-1} への像は x, y のとり方によらず f, g のみで一意的に定まることが分かるので，この像を $\{f, g\}$ と記す．すると $\{\ ,\ \}$ は $\mathrm{Gr}(R) \times \mathrm{Gr}(R)$ から $\mathrm{Gr}(R)$ への双線型写像であることが分かる．さらに

$$\begin{aligned}
&\{f, f\} = 0 \\
&\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \\
&\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0
\end{aligned}$$

が成立する．$\{\ ,\ \}$ を **Poisson 括弧式**(Poisson bracket)という．さてフィルター環 R に関して R 加群 M が増加フィルター $\{M_n = G_n(M)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ をもち，

$$R_k \cdot M_n \subset M_{k+n}$$

が任意の整数 k, n に対して成立するとき，M を**フィルター R 加群**(filtered R-module)と呼ぶ．このとき逐次商

$$\mathrm{Gr}(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_n\, M, \quad \mathrm{Gr}_n\, M = M_n/M_{n-1}$$

は $\mathrm{Gr}(R)$ 加群となる．$\mathrm{Gr}(R)$ が可換環のとき零化イデアル

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}(M)) = \{f \in \mathrm{Gr}(R) \mid f\cdot\mathrm{Gr}(M)\} = 0$$

は $\mathrm{Gr}(R)$ の次数イデアルである．そこでこのイデアルの根基を

$$J(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{Gr}(M))}$$

と記すことにすると次の重要な事実が成立する．

定理 4.26 (Gabber の定理)　フィルター環 R の逐次商環 $\mathrm{Gr}(R)$ は可換 Noether 環であり，かつ有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の代数であると仮定する．有限生成フィルター R 加群 M に対して

$$\{J(M), J(M)\} \subset J(M)$$

が成立する．□

さらに，この定理の証明のために次の補題を証明する．

補題 4.27　任意の非負整数 m に対して

$$V_m = \mathcal{H}_{\vec{\lambda}} \Big/ \left(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{j=1}^{N} \mathbb{C}[\xi_j^{-1}]\xi_j^{-m}\right)\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

は有限次元ベクトル空間である．

［証明］　まず $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}[\xi_j^{-1}]\xi_j^{-m}\right)$ は $\mathfrak{g}_N$ の部分 Lie 代数であることに注意する．$\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ 上にフィルター $\{F_\bullet\}$ を

(4.35)
$$F_p\mathcal{H}_{\vec{\lambda}} = \sum_{d\leqq p} \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(d)$$

で定義する．ここで

$$(4.36)\qquad \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(d) = \sum_{d_1+\cdots+d_N=d} \mathcal{H}_{\lambda_1}(d_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N}(d_N)$$

とおいた.

$$F_0\mathcal{H}_{\vec{\lambda}} = \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(0) = V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N}$$

に注意する．以下簡単のためにこのベクトル空間を $V_{\vec{\lambda}}$ と記す.

定理4.12により $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ は $U\left(\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}[\xi_j^{-1}]\right)\right)$ 加群として $V_{\vec{\lambda}}$ から生成される．ここで $U(\mathfrak{q})$ は Lie 代数 $\mathfrak{q}$ の普遍展開環である．さて $V_{\vec{\lambda}}$ の V_m への像を $\overline{V}$ と記しさらに

$$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}\otimes\left(\bigoplus_{j=1}^{N}(\mathbb{C}[\xi_j^{-1}]/(\xi_j^{-m}))\right)$$

とおく．すると $\overline{V}$ は有限次元ベクトル空間であり,

$$V_m = U(\overline{\mathfrak{g}})\cdot\overline{V}$$

が成り立つ．したがって V_m は有限 $U(\overline{\mathfrak{g}})$ 加群である．そこで $U(\overline{\mathfrak{g}})$ および V_m のフィルター $\{G_\bullet\}$ を次のように定義する.

$$G_nU(\overline{\mathfrak{g}}) = \begin{cases} 0, & n<0 \\ \mathbb{C}\cdot 1, & n=0 \\ G_{n-1}U(\overline{\mathfrak{g}})+\overline{\mathfrak{g}}G_{n-1}U(\overline{\mathfrak{g}}), & n\geqq 1 \end{cases}$$

$$G_nV_m = G_nU(\overline{\mathfrak{g}})\cdot\overline{V}$$

すると

$$G_kU(\overline{\mathfrak{g}})G_nU(\overline{\mathfrak{g}}) \subset G_{k+n}U(\overline{\mathfrak{g}})$$

$$[G_kU(\overline{\mathfrak{g}}), G_nU(\overline{\mathfrak{g}})] \subset G_{k+n-1}U(\overline{\mathfrak{g}})$$

$$G_kU(\overline{\mathfrak{g}})G_mV_m \subset G_{k+n}V_m$$

が成り立つことが容易に分かる.

そこでこのフィルターに付随した逐次商 $\mathrm{Gr}_\bullet^G U(\overline{\mathfrak{g}})$, $\mathrm{Gr}_\bullet^G V_m$ を考える．Poincaré–Birkhoff–Witt の定理により $\mathrm{Gr}_\bullet^G U(\overline{\mathfrak{g}})$ は $\overline{\mathfrak{g}}$ 上の対称代数 $S^*(\overline{\mathfrak{g}})$ である．さらに $\mathrm{Gr}_\bullet^G U(\overline{\mathfrak{g}})$ は

$$P\in G_kU(\overline{\mathfrak{g}}),\quad Q\in G_nU(\overline{\mathfrak{g}})$$

に対して

$$\{\overline{P},\overline{Q}\}=\overline{[P,Q]}$$

と定義される Poisson 括弧式 $\{\ ,\ \}$ をもつ．ここで

$$\overline{P}\in G_kU(\overline{\mathfrak{g}})/G_{k-1}U(\overline{\mathfrak{g}}),\quad \overline{Q}\in G_nU(\overline{\mathfrak{g}})/G_{n-1}U(\overline{\mathfrak{g}})$$

とおいた．したがって $a,b\in\overline{\mathfrak{g}}\subset G_1U(\overline{\mathfrak{g}})$ であれば

$$\{a,b\}=[a,b]$$

が成り立つ．

さて零化イデアル

$$\mathfrak{a}=\{a\in \mathrm{Gr}^G_\bullet U(\overline{\mathfrak{g}})\mid a\cdot \mathrm{Gr}^G_\bullet V_m=0\}$$

を考える．Gabber の定理により $\mathfrak{a}$ の根基 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ は Poisson 括弧式で閉じている．定理 4.13 より元 $X_\alpha\otimes\xi_j^{-n}(X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha,\ \alpha\in\Delta,\ n\in\mathbb{Z})$ は局所べき零的に $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ に作用する．したがって

$$\overline{X_\alpha\otimes\xi_j^{-n}}\in\sqrt{\mathfrak{a}},\quad n=0,1,\cdots,m-1$$

が成立する．一方 Gabber の定理によって

$$\overline{H_\alpha\otimes\xi_j^{-n}}=\{X_\alpha\otimes 1,\ X_{-\alpha}\otimes\xi_j^{-n}\}\in\sqrt{\mathfrak{a}},\quad n=0,1,\cdots,m-1$$

が成立する．これは $\overline{\mathfrak{g}}\subset\sqrt{\mathfrak{a}}$ を意味する．したがって $\sqrt{\mathfrak{a}}$ は極大イデアル $\overline{\mathfrak{g}}\,\mathrm{Gr}^G_\bullet U(\overline{\mathfrak{g}})$ を含んでいる．よって $\mathrm{Gr}^G_\bullet U(\overline{\mathfrak{g}})/\mathfrak{a}$ は Artin 環である．$\mathrm{Gr}^G_\bullet V_m$ は有限 $\mathrm{Gr}^G_\bullet U(\overline{\mathfrak{g}})/\mathfrak{a}$ 加群であるので $\mathrm{Gr}^G_\bullet V_m$ は有限次元ベクトル空間である．したがって，V_m は有限次元ベクトル空間である． ∎

定理 4.25 の証明にはさらに準備が必要である．そのために $\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))$ と $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ 上にフィルター $\{F_\bullet\}$ を導入する．$\mathbb{C}((\xi_j))$ のフィルター $\{F_\bullet\}$ は

$$F_p\mathbb{C}((\xi_j))=\mathbb{C}[[\xi_j]]\xi_j^{-p}$$

で定義される．$\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))$ のフィルター $\{F_\bullet\}$ は

$$F_p\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))=\bigoplus_{j=1}^{N}F_p\mathbb{C}((\xi_j))$$

で定義する．$\widehat{\mathfrak{g}}_N$ のフィルター $\{F_\bullet\}$ は

$$(4.37)\qquad F_p\widehat{\mathfrak{g}}_N = \begin{cases} \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{j=1}^{N} F_p\mathbb{C}((\xi_j))\right)\oplus\mathbb{C}\cdot c, & p\geqq 0 \\ \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{j=1}^{N} F_p\mathbb{C}((\xi_j))\right), & p<0 \end{cases}$$

と定義する．このフィルターに付随する逐次商は

$$\mathrm{Gr}^F_{\bullet}\left(\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))\right) = \bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}[\xi_j,\xi_j^{-1}]$$

$$\mathrm{Gr}_{\bullet}(\widehat{\mathfrak{g}}_N) = \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}[\xi_j,\xi_j^{-1}]\right)\oplus\mathbb{C}\cdot c$$

となる．(4.35), (4.36), (4.37) より

$$(4.38)\qquad F_p\widehat{\mathfrak{g}}_N\cdot F_q\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\subset F_{p+q}\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

が成立することが分かる．ところで $\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))$ および $\widehat{\mathfrak{g}}_N$ のフィルター $\{F_{\bullet}\}$ から $H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ と $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ のフィルターが導入できる．(既に述べたように

$$H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$$

は埋め込み t によって $\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}((\xi_j))$ の部分空間とみている．) 次の補題は定理 4.25 の証明で大切な役割をする．

補題 4.28　$m>\dfrac{1}{N}(2g(C)-1)+1$ であれば自然な単射

$$\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}[\xi_j^{-1}]\xi_j^{-m}\hookrightarrow \mathrm{Gr}^F_{\bullet}H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$$

が存在する．

［証明］　もし $\sum_{j=1}^{N}n_j\geqq 2g(C)-1$ であれば

$$\dim_{\mathbb{C}}H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(\sum_{j=1}^{N}n_jQ_j\right)\right)=\sum_{j=1}^{N}n_j+1-g(C)$$

が成り立つ．したがって，もし $k>(2g(C)-1)/N$ であれば

$$\dim_{\mathbb{C}}H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left((k-1)\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)=N(k-1)+1-g$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0\left(C, \mathcal{O}_C\left((k-1)\sum_{j\neq i}^{N} Q_j + kQ_i\right)\right) = N(k-1)+2-g$$

が成立する．したがって点 Q_i で k 位の極をもち，Q_j，$j\neq i$ では $k-1$ 次以下の極をもつ函数 $f\in H^0\left(C, \mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N} Q_j\right)\right)$ が存在する． ▮

系 4.29 任意の正整数 $m \geqq \frac{1}{N}(2g(C)-1)+1$ に対して自然な単射

$$\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}} \bigoplus_{j=1}^{N} \mathbb{C}[\xi_j]\xi_j^{-m} \hookrightarrow \mathrm{Gr}_{\bullet}^{F}\,\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$$

が存在する． □

定理 4.25 を証明するためにはさらにもう一つ補題が必要である．

補題 4.30

$$F_p(\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}) = \sum_{p_1+p_2=p} F_{p_1}\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})F_{p_2}\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

［証明］ 上の等式の右辺が左辺に含まれていることは明らかである．そこで

$$F_p(\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}) \not\subset \sum_{p_1+p_2=p} F_{p_1}\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})F_{p_2}\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

と仮定する．すると $q+r>p$ となるある q と r に対して

$$X\otimes f \in F_q(\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})) \setminus F_{q-1}(\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}))$$
$$|\Phi\rangle \in F_r\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

を満足する元

$$(X\otimes f)|\Phi\rangle \in F_p(\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}})$$

が存在する．一方，各 j に対して

$$t_j(f) \in F_{q_j}\mathbb{C}((\xi_j)) \setminus F_{q_j-1}\mathbb{C}((\xi_j))$$

となる整数 q_j が存在する．$q_k=q$ となる k が少なくとも一つは存在する．また，

$$|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\lambda_1}(d_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N}(d_N), \quad d_1+\cdots+d_N = r$$

と仮定してよい．すると

$$\rho_j(X\otimes t_j(f))|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\lambda_1}(d_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_j}(d_j+q_j)\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N}(d_N)$$

となる．したがって

$$(X\otimes f)|\Phi\rangle \in F_{r+q}\mathcal{H}_{\vec{\lambda}} \setminus F_{r+q-1}\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

が成り立つ．しかし，$r+q>p$ であるのでこれは矛盾である．∎

［定理 4.25 の証明］

$$m \geqq \frac{1}{N}(2g(C)-1)+1$$

を満足する正整数 m を固定する．補題 4.30 より

$$\mathrm{Gr}^F_\bullet(\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}) = \mathrm{Gr}^F_\bullet(\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}))\mathrm{Gr}^F_\bullet(\mathcal{H}_{\vec{\lambda}})$$

が成り立つ．したがって $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ へのフィルター $\{F_\bullet\}$ を導入すると

$$\mathrm{Gr}^F_\bullet \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) = \mathrm{Gr}^F_\bullet(\mathcal{H}_{\vec{\lambda}})/\,\mathrm{Gr}^F_\bullet(\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X}))\mathrm{Gr}^F_\bullet(\mathcal{H}_{\vec{\lambda}})$$

が成り立つ．一方，系 4.29 より

$$\mathrm{Gr}^F_\bullet \mathcal{H}_{\vec{\lambda}} = \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

が成立するので全射準同型写像

$$V_m = \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}/\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}}\left(\bigoplus_{j=1}^{N}\mathbb{C}[\xi_j^{-1}]\xi_j^{-m}\right) \longrightarrow \mathrm{Gr}^F_\bullet \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$$

が存在することが分かる．一方，補題 4.27 より $\mathrm{Gr}^F_\bullet \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ は有限次元ベクトル空間であるので $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ も有限次元ベクトル空間でなければならない．∎

Gabber の定理を使わない証明が Suzuki [88], Sorger [86] によって得られている．

今までは連結な代数曲線を考えてきたが，後の応用のためには非連結な代数曲線に対しても共形ブロックを定義しておいた方が便利である．形式近傍をもった安定 N_1 点付曲線

$$\mathfrak{X}_1 = (C_1; P_1, \cdots, P_{N_1}; s_1, \cdots, s_{N_1})$$

と形式近傍をもった安定 N_2 点付曲線

$$\mathfrak{X}_2 = (C_2; Q_1, \cdots, Q_{N_2}; t_1, \cdots, t_{N_2})$$

に対して**連結和**(connected sum) $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\sqcup\mathfrak{X}_2$ を

$$\mathfrak{X} = (C; P_1, \cdots, P_{N_1}, Q_1, \cdots, Q_{N_2}; s_1, \cdots, s_{N_1}, t_1, \cdots, t_{N_2})$$

と定義する．ここで $C=C_1\sqcup C_2$ である．このとき $\mathfrak{X}$ は連結でないことを除けば形式近傍をもった安定点付曲線の定義を満足している．このような $\mathfrak{X}$

に対して共形ブロック $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ と双対共形ブロック $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ を定義 4.23 と同様に定義する．このとき次の事実が成り立つことは簡単に示すことができる．

命題 4.31 形式近傍をもった非連結安定 N 点付曲線

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \sqcup \mathfrak{X}_2$$

に対して標準的な同型写像

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) \simeq \mathcal{V}_{\vec{\lambda}_1}(\mathfrak{X}_1) \otimes \mathcal{V}_{\vec{\lambda}_2}(\mathfrak{X}_2)$$

$$\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) \simeq \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}_1}(\mathfrak{X}_1) \otimes \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}_2}(\mathfrak{X}_2)$$

が存在する．ただし $\vec{\lambda} = (\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2)$ とおいた． □

(d) 形式近傍

前項で定義した共形ブロックが形式近傍のとり方にどのように依存するか調べておこう．形式 Laurent 級数体 $\mathbb{C}((\xi))$ の自己同型群を $\mathcal{D}$ と記そう．群 $\mathcal{D}$ は形式的べき級数環 $\mathbb{C}[[\xi]]$ の自己同型群とみることもできる．また自然な同型写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \simeq & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{n+1} \,\middle|\, a_0 \neq 0 \right\} \\ h & \longmapsto & h(\xi) \end{array}$$

が存在する．その際 $h_1, h_2 \in \mathcal{D}$ の合成 $h_1 \circ h_2$ には形式的べき級数 $h_1(h_2(\xi))$ が対応する．

正整数 p に対して，$\mathcal{D}^p = \{ h \in \mathcal{D} \mid h(\xi) = \xi + a_0 \xi^{p+1} + \cdots \}$ とおくことによって $\mathcal{D}$ のフィルター

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \cdots$$

が定義できる．正整数 p に対してさらに

$$\underline{d} = \mathbb{C}[[\xi]]\xi \frac{d}{d\xi}$$

$$\underline{d}^p = \mathbb{C}[[\xi]]\xi^{p+1} \frac{d}{d\xi}$$

とおくと，$\underline{d}$ のフィルター

$$\underline{d}=\underline{d}^0\supset\underline{d}^1\supset\underline{d}^2\supset\cdots$$

が定義される．形式的ベクトル場 $\underline{l}\in\underline{d}$ と $f(\xi)\in\mathbb{C}[[\xi]]$ に対して $\exp(\underline{l})(f(\xi))$ を

$$\exp(\underline{l})(f(\xi))=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\underline{l}^k f(\xi)\right)$$

と定義する． $\exp(\underline{l})$ は $\mathbb{C}[[\xi]]$ および $\mathbb{C}((\xi))$ の自己同型である．たとえば $\underline{l}=\alpha\xi\dfrac{d}{d\xi}$, $\alpha\in\mathbb{C}^*$ に対して

$$\exp(\underline{l})(\xi)=e^{\alpha}\xi$$

となり， $\exp(\underline{l})$ は $g(\xi)\mapsto g(e^{\alpha}\xi)$ によって与えられる $\mathbb{C}[[\xi]]$ および $\mathbb{C}((\xi))$ の自己同型である．特に正整数 n に対して $\exp\left(2\pi\sqrt{-1}n\xi\dfrac{d}{d\xi}\right)$ は恒等写像である．次の補題は容易に証明することができる．

補題 4.32　指数写像

$$\begin{array}{rccc}\exp\colon & \underline{d} & \longrightarrow & \mathcal{D}\\ & \underline{l} & \longmapsto & \exp(\underline{l})\end{array}$$

は全射である．さらに正整数 p に対して

$$\exp\colon\ \underline{d}^p\longrightarrow\mathcal{D}^p$$

は同型写像である． □

上で述べたように指数写像 exp は $\underline{d}^0$ 上では同型写像ではない．

$\underline{l}\in\underline{d}^p$, $p\geqq 1$ に対して $\exp(T[\underline{l}])$ を

$$\exp(T[\underline{l}])=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}T[\underline{l}]^k$$

と定義する． $\exp(T[\underline{l}])$ は左から $\mathcal{H}_\lambda$ に，右から $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ に作用する．この作用が $\mathrm{Gr}_\bullet^F\mathcal{H}_\lambda$, $\mathrm{Gr}_F^\bullet\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ 上に引き起こす作用は恒等作用であることに注意する．

定義 4.33　自己同型 $h\in\mathcal{D}^p$, $p\geqq 1$ に対して $\mathcal{H}_\lambda$ および $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ への作用素 $G[h]$ を

$$G[h]=\exp(-T[\underline{l}])$$

と定義する．ここで $h=\exp(\underline{l})$ である． □

$G[h]$ は $\mathcal{H}_\lambda$, $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ の自己同型である．次の定理は作用素 $T[\underline{l}], G[h]$ の意味づけを与える．証明は計算を丁寧に行なえばよいが，長くなるので割愛する．

定理 4.34 $h\in\mathcal{D}^p$, $p\geqq 1$ と $f(\xi)\in\mathbb{C}((\xi))$ に対して $\mathcal{H}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda^\dagger$ の作用素として以下の等式が成立する．

(1) $G[h](X\otimes f(\xi))G[h]^{-1}=X\otimes f(h(\xi))$.

(2) $h_1, h_2\in\mathcal{D}^p$, $p\geqq 1$ に対して $G[h_1]\cdot G[h_2]=G[h_1\circ h_2]$.

(3) $\underline{l}=l(\xi)\dfrac{d}{d\xi}\in\mathbb{C}((\xi))$, $f\in\mathbb{C}((\xi))$, $X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$G[h]T[\underline{l}]G[h]^{-1}=T[\mathrm{ad}(h)(\underline{l})]+\frac{c_v}{12}\operatorname*{Res}_{\xi=0}(\{h(\xi);\xi\}l(\xi)d\xi)$$

が成り立つ．ここで $\{h(\xi);\xi\}$ は **Schwarz 微分**と呼ばれ

$$\{h(\xi);\xi\}=\frac{w'''}{w'}-\frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

で定義される． □

この定理から次の定理が成り立つことが分かる．

定理 4.35 $h_j\in\mathcal{D}^p$, $p\geqq 1$, $j=1,2,\cdots,N$ および形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,\cdots,Q_N;\xi_1,\cdots,\xi_N)$ に関して

$$\mathfrak{X}_{(h)}=(C;Q_1,\cdots,Q_N;h_1(\xi_1),\cdots,h_N(\xi_N))$$

とおく．このとき同型写像 $G[h_1]^{-1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}G[h_N]^{-1}$

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}^\dagger=\mathcal{H}_{\lambda_1}^\dagger\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathcal{H}_{\lambda_N}^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}^\dagger=\mathcal{H}_{\lambda_1}^\dagger\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\mathcal{H}_{\lambda_N}^\dagger \\ \langle\phi_1\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\phi_N| & \longmapsto & \langle\phi_1G[h_1]^{-1}\widehat{\otimes}\phi_2G[h_2]^{-1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}\phi_NG[h_N]^{-1}|\end{array}$$

は同型写像

$$G[h_1]^{-1}\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}G[h_N]^{-1}\colon\ \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(\mathfrak{X})\longrightarrow\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(\mathfrak{X}_{(h)})$$

を引き起こす． □

系 4.36 二つの形式近傍をもった安定 N 点付曲線

$$\mathfrak{X}=(C;Q_1,\cdots,Q_N;\xi_1,\cdots,\xi_N)$$
$$\mathfrak{X}'=(C;Q_1,\cdots,Q_N;\eta_1,\cdots,\eta_N)$$

が 1 次の無限小近傍では一致するとき，標準的な同型写像

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(\mathfrak{X})\simeq\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(\mathfrak{X}')$$

が存在する. □

このように共形ブロックは1次の無限小近傍のみに依存して定まることが分かった.

(e) 共形ブロックの基本性質

形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,\cdots,Q_N;\eta_1,\cdots,\eta_N)$, C 上の非特異点 P とその形式近傍 η に対して $Q_{N+1}=P$, $\eta_{N+1}=\eta$ とおいて形式近傍をもった安定 $N+1$ 点付曲線

$$\widetilde{\mathfrak{X}}=(C;Q_1,\cdots,Q_N,Q_{N+1};\eta_1,\cdots,\eta_N,\eta_{N+1})$$

を作ることができる.

一方, 積分可能左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 $\mathcal{H}_0$ の最高ウェイトベクトル $|0\rangle$ を固定すると標準的な単射

$$\begin{array}{cccc} \iota\colon & \mathcal{H}_{\vec{\lambda}} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes\mathcal{H}_0 \\ & |v\rangle & \longmapsto & |v\rangle\otimes|0\rangle \end{array}$$

が定義でき, 双対をとることによって標準的な全射

$$\widehat{\iota}^{\,*}\colon \mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}\otimes\mathcal{H}^{\dagger}_0 \longrightarrow \mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}$$

ができる. このとき, 次の重要な事実が成立する.

定理 4.37 標準的な全射 $\widehat{\iota}^{\,*}$ は標準的な同型

$$\mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\widehat{\mathfrak{X}})\simeq\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$$

を引き起こす. この同型は最高ウェイトベクトル $|0\rangle\in V_0$ によって一意的に定まる.

[証明] $\langle\widetilde{\Psi}|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\widehat{\mathfrak{X}})$ に対して $\langle\Psi|=\widehat{\iota}^{*}(\langle\widetilde{\Psi}|)$ とおく. $X\in\mathfrak{g}$, $|u\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$, $f\in \mathcal{H}^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ に対して

$$\sum_{j=1}^{N}\langle\Psi|\rho_j(X[f])|u\rangle=\sum_{j=1}^{N}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[f])|u\otimes 0\rangle$$

が成立する. f は点 $Q_{N+1}=P$ では正則であるので

$$\langle\widetilde{\Psi}|\rho_{N+1}(X[f])|u\otimes 0\rangle = 0$$

が成立する．したがって

$$\sum_{j=1}^{N}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[f])|u\otimes 0\rangle = \sum_{j=1}^{N+1}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[f])|u\otimes 0\rangle = 0$$

が成立する．これは $\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ を意味し，線型写像

$$\iota^*\colon\ \mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\widetilde{\Psi}) \longrightarrow \mathcal{V}^{\dagger}_{0,\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$$

が存在することが分かる．まず ι^* が単射であることを示そう．$\langle\Psi| = \hat{\iota}^*(\langle\widetilde{\Psi}|) = 0$ と仮定する．$\mathcal{H}_0$ のフィルターの次数 p に関する帰納法によって

(4.39)　すべての $|u\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$, $|v\rangle\in F_p\mathcal{H}_0$ に対して $\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes v\rangle = 0$

が成立することを示そう．仮定より

$$\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes 0\rangle = \langle\Psi|u\rangle = 0$$

が成立するので，$p=0$ のとき(4.39)は正しい．そこで，p のとき(4.39)が正しいと仮定する．$X(m)|v\rangle\in F_{p+1}\mathcal{H}_0$, $|v\rangle\in F_p\mathcal{H}_0$ に対して，$f\in H^0\left(C, \mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ および正整数 M を点 $Q_{N+1}=P$ で，$k\geqq M$ のとき

$$X\otimes\eta^k|v\rangle = 0, \tag{4.40}$$

かつ

$$f\equiv\eta^m \pmod{\eta^M} \tag{4.41}$$

が成立するように定める．すると帰納法の仮定により

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes X(m)|v\rangle &= \langle\widetilde{\Psi}|u\otimes(X[f])v\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{N}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[f])|u\otimes v\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

が成立する．よって(4.39)が $p+1$ のときも成立する．したがってすべての $|u\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$, $|v\rangle\in\mathcal{H}_0$ に対して $\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes v\rangle=0$ が成立し，$\langle\widetilde{\Psi}|=0$ であることが分かる．

次に ι^* は全射であることを示そう．そのために Verma 加群 $\mathcal{M}_0 = U(\widehat{\mathfrak{g}})\otimes_{\widehat{\mathfrak{p}}_+}V_0$, $\mathfrak{p}_+ = \widehat{\mathfrak{g}}_+\oplus\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}\cdot c$ を考える．$\mathcal{M}_0$ は左 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群であり，$\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{M}_0$ の商加群

として実現される．$\langle\Psi|\in\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ に対して $\langle\widetilde{\Psi}|\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes\mathcal{M}_0,\mathbb{C})$ を構成しよう．まず $|u\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ に対して

$$\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes 0\rangle=\langle\Psi|u\rangle$$

と定義する．すると $g\in H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ に対して

$$\sum_{j=1}^{N}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[g])|u\otimes 0\rangle=\sum_{j=1}^{N}\langle\Psi|\rho_j(X[g])|u\rangle=0$$

が成立する．次に $|u\otimes v\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes F_p\mathcal{M}_0$, $g\in H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ に対して

$$\sum_{j=1}^{N}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[g])|u\otimes v\rangle=0$$

を満足するように $\langle\widetilde{\Psi}|\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes F_p\mathcal{M}_0,\mathbb{C})$ が定義できたと仮定する．このとき $X(m)|v\rangle\in F_{p+1}\mathcal{M}_0$, $|v\rangle\in F_p\mathcal{M}_0$, $|u\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ に対して

$$\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes X(m)v\rangle=-\sum_{j=1}^{N}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[f])|u\otimes v\rangle \tag{4.42}$$

と定義する．ただし有理型函数 f は(4.40), (4.41)を満足すると仮定する．このとき右辺が f のとり方によらずに一意的に定まることは容易に分かる．また $g\in H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N+1}Q_j\right)\right)$ に対して $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes F_{p+1}\mathcal{H}_0$ 上で

$$\sum_{j=1}^{N+1}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[g])\equiv 0$$

であることも分かる．さらに，$X(m_1)Y(m_2)\in F_{p+1}\mathcal{M}_0$, $|v\rangle\in F_{p+1}\mathcal{M}_0$ であれば

$$\begin{aligned}&\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes X(m_1)Y(m_2)v\rangle-\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes Y(m_2)X(m_1)v\rangle\\&\quad=\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes\{[X,Y](m_1+m_2)+lm_1(X,Y)\delta_{m_1+m_2,0}\}v\rangle\end{aligned}$$

が成り立つことも直ちに分かる．

以上の議論により $\langle\widetilde{\Psi}|$ は $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes\mathcal{M}_0$ 上の線型型式であることが分かる．これが $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes\mathcal{H}_0$ 上の線型型式を引き起こすことを示すためには

$$\langle\widetilde{\Psi}|u\otimes X_\theta(-1)^{l+1}|0\rangle=0 \tag{4.43}$$

を示せばよい．C 上の有理型函数 $f\in H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$ を，$Q_{N+1}=P$

で1位の零点をもち，条件(4.41)を $m=1$, $M \geqq 2$ のとき満足するように選ぶ．定理4.13により $|u\rangle \in \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ にのみ依存する正整数 n を，$k \geqq \dfrac{n}{N}$ のとき

$$\rho_j(X_{-\theta}[f]^k)|u\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, N$$

が成立するように選ぶことができる．点 $Q_{N+1} = P$ で

$$E = X_{-\theta}[f], \quad F = X_{-\theta}(-1), \quad H = [E, F]$$

とおくと

$$H = [X_{-\theta}, X_\theta][\eta^{-1}f] + (X_{-\theta}, X_\theta)c = -H_{-\theta}[\eta^{-1}f] + c$$

が成り立つ．$\eta^{-1}f$ は点 P で正則であるので

$$H|0\rangle = l|0\rangle$$

が成立する．さらに簡単な計算により

$$HF^k|0\rangle = (l-2k)F^k|0\rangle, \quad EF^k|0\rangle = (kl - k^2 + k)F^{k-1}|0\rangle$$

が成立することが分かる．したがって任意の正整数 m に対して

$$E^m F^{m+l+1}|0\rangle = c_m F^{l+1}|0\rangle, \quad c_m \geqq 1$$

が成立する．(4.42)および f のとり方より

$$\begin{aligned}
&c_n\langle\widetilde{\Psi}|u \otimes X_\theta(-1)^{l+1}|0\rangle \\
&= \langle\widetilde{\Psi}|u \otimes (X_{-\theta}[f])^n X_\theta(-1)^{n+l+1}|0\rangle \\
&= (-1) \sum_{n_1+\cdots+n_N=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_N!} \langle\widetilde{\Psi}| \prod_{j=1}^{N} \rho_j(X_{-\theta}[f])^{n_j} u \otimes X_\theta(-1)^{l+1}|0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成立し，(4.43)が成り立つことが分かる． ∎

系 4.38 標準的な同型

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X}) \simeq \mathcal{V}_{0,\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{X}})$$

が存在する． □

ところで，点 Q_j に関する条件(Q)が満たされない場合は，半安定曲線 C の既約成分の内，点 Q_j がのっていない成分に関してはあらたに点を選び，その点にラベル0を対応させることによって条件(Q)を満足させるようにすることができる．このとき，点のとり方によらずに同型な共形ブロックができることは上の定理と系が保証している．また，上の証明で次の命題も実質的に証明している．

命題 4.39　標準的な単射

$$V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_{N-1}}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N}\hookrightarrow\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

から自然な射影

$$p\colon\ \mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_{N-1}}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N},\mathbb{C})$$

が引き起こされる．射影 p の像は

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^{\dagger(N)}_{\vec{\lambda}}=\{\langle\Psi|\in V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_{N-1}}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_N}\ |\\ \langle\Psi|X\otimes f=0,\ \text{すべての}\ f\in H^0(C,\mathcal{O}_C(*Q_N))\}\end{aligned}$$

に含まれ，$p\colon\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})\to\mathcal{V}^{\dagger(N)}_{\vec{\lambda}}$ は単射である．　□

種数0のときはさらに強い結果が成立する．

定理 4.40　$\mathfrak{X}$ が種数0の安定 N 点付曲線の場合は標準的な単射

$$V_{\vec{\lambda}}\hookrightarrow\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

から引き起こされる標準的な写像

$$p\colon\ \mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\vec{\lambda}},\mathbb{C})$$

は単射である．

［証明］　種数0の半安定曲線 C 上の任意の点 P と任意の正整数 n に対して，点 P で n 位の極をもち他の点では正則な有理型函数が必ず存在するので，定理4.37の証明より定理が成立することが分かる．　∎

この定理は底曲線の種数が正の場合は正しくないことに注意する．たとえば，形式近傍をもった1点付楕円曲線 $\mathfrak{X}=(E;Q,\zeta)$ に対して

$$\dim\mathcal{V}^\dagger_0(\mathfrak{X})=l+1$$

が成立するが，一方 $\mathrm{Hom}(V_0,\mathbb{C})$ は1次元である．

例 4.41　以下の節で示すように，共形ブロックの次元の計算に関しては形式近傍をもった3点付射影直線 $\mathfrak{X}=(\mathbb{P}^1;z_1,z_2,z_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ の共形ブロック $\mathcal{V}_{\lambda,\mu,\nu}$ の記述が基本的である．このことに関しては $\vec{\lambda}=(\lambda,\mu,\nu)$ とおくと，上記の定理4.40に基づいて

$$p\colon\ \mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\vec{\lambda}},\mathbb{C})$$

の像 $W_{\vec{\lambda}}=W_{\lambda,\mu,\nu}$ を記述することによって与えることができる．そのためには最長ルート θ からできる $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数

$$\mathfrak{k}_\theta = \mathbb{C}X_\theta \oplus \mathbb{C}X_{-\theta} \oplus \mathbb{C}[X_\theta, X_{-\theta}] \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$$

の作用に関する $\mathfrak{g}$ 加群 V の $\mathfrak{k}_\theta$ 加群としての分解を

$$V = \bigoplus_{j=0}^{M} V^{(j)}$$

と記す．ここで $V^{(j)}$ は $\mathfrak{k}_\theta$ 加群としてのスピン j のウェイト空間である．$V = V_\lambda$ の場合 $M = l/2$ ととれる．このとき

$$(4.44)\quad W_{\lambda,\mu,\nu} = \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda \otimes V_\mu \otimes V_\nu, \mathbb{C}) \mid h+i+j > l \text{ のとき } \phi \,|\, V_\lambda^{(h)} \otimes V_\mu^{(i)} \otimes V_\nu^{(j)} = 0\}$$

であることが知られている．詳しくは Tsuchiya–Kanie [90]を参照されたい．これより特に

$$(4.45)\qquad \dim_{\mathbb{C}} W_{0,\lambda,\lambda^\dagger} = 1$$

であることが分かる．この事実は後に Verlinde の公式を導く際に重要になる．実際，この場合は

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_0 \otimes V_\lambda \otimes V_{\lambda^\dagger}, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda, V_\lambda) \simeq \mathbb{C}$$

が成り立つことから(4.45)を示すことができる． □

(f) 相関函数

相関函数(correlation function)は場の量子論における物理量の観測の期待値を表す量である．正則な共形場理論においてもその類似物を定義することができる．形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X} = (C; Q_1, \cdots, Q_N; \eta_1, \cdots, \eta_N)$ を考える．$X \in \mathfrak{g}$ から定まる形式和

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n) z^{-n-1}$$

をカレントと呼んだ．$X(z)$ は作用素に値をとる函数と形式的に考えると $\langle \Psi | \in \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(\mathfrak{X})$, $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ に対して期待値 $\langle \Psi | X(z) | \Phi \rangle$ を考えることができる．実は $\langle \Psi | X(z) | \Phi \rangle$ は C 上の有理型微分型式と考えた方がよいことが分かる．そこで $\langle \Psi | X(z) | \Phi \rangle dz$ と記すことにする．この微分型式の情報としては点 Q_j で

$$\omega_j = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \Psi | \rho_j(X(n)) | \Phi \rangle \xi_j^{-n-1} d\xi_j \tag{4.46}$$

と展開ができていることが挙げられる．$n \gg 0$ のとき $\rho_j(X(n))|\Phi\rangle = 0$ であるので(4.46)の負べきの項は有限個である．このとき ω_j, $j=1,\cdots,N$ が C 上の微分型式を定義することは定理4.37からの帰結である．すなわち $f \in H^0\left(C, \mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^N Q_j\right)\right)$ の点 Q_j での形式座標 ξ_j による Laurent 展開を

$$f_j = \sum_{n=-m_j}^{\infty} a_j^{(n)} \xi_j^n$$

と記すと

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(f_j\omega_j) &= \sum_{n=-m_j}^{\infty} \langle \Psi | a_j^{(n)} \rho_j(X(n)) | \Phi \rangle \\ &= \langle \Psi | \rho_j(X[f]) | \Phi \rangle\end{aligned}$$

となり，$\langle \Psi | \in \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{X})$ であるので

$$\sum_{j=1}^N \operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(f_j\omega_j) = \sum_{j=1}^N \langle \Psi | \rho_j(X[f]) | \Phi \rangle = 0$$

を得る．したがって ω_j, $j=1,\cdots,N$ は $H^0\left(C, \omega_C\left(*\sum_{j=1}^N Q_j\right)\right)$ の元を定める．これを $\langle \Psi | X(z) | \Phi \rangle dz$ あるいは C の点 P を意識して $\langle \Psi | X(P) | \Phi \rangle dP$ と記す．

半安定曲線 C の双対層を ω_C と記し，

$$C^M = \overbrace{C \times \cdots \times C}^{M}$$

の j 番目の因子への射影を π_j と記すとき，C^M の双対化層 ω_{C^M} は $\omega_C^{\boxtimes M}$ と一致することが知られている．ここで次の定理が成り立つ．

定理 4.42　元 $\langle \Psi | \in \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{X})$ を固定する．非負整数 M および

$$X_1, X_2, \cdots, X_M \in \mathfrak{g}, \quad |\Phi\rangle \in \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

に対して

$$H^0\left(C^M, \omega_C^{\boxtimes M}\left(\sum_{1 \leqq i < j \leqq M} *\Delta_{ij} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N *\pi_i^{-1}(Q_j)\right)\right)$$

の元

$$F = \langle\Psi|X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dP_1dP_2\cdots dP_M$$

が定義でき，次の性質をもつ．

（0） $M=0$ のとき，$F=\langle\Psi|\Phi\rangle$ は(4.26)から定まる対写像である．

（1） F は $|\Phi\rangle$ に関して線型であり，X_i に関して多重線型である．

（2） 任意の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_M$ に対して

$$F = \langle\Psi|X_{\sigma(1)}(P_{\sigma(1)})X_{\sigma(2)}(P_{\sigma(2)})\cdots X_{\sigma(M)}(P_{\sigma(M)})|\Phi\rangle dP_1dP_2\cdots dP_M$$

が成り立つ．たとえば，互換 $(i,i+1)$ に対して

$$F = \langle\Psi|X_1(P_1)\cdots X_{i-1}(P_{i-1})X_{i+1}(P_{i+1})X_i(P_i)$$
$$X_{i+2}(P_{i+2})\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dP_1dP_2\cdots dP_M$$

が成り立つ．

（3） 形式座標 $\xi_k=\eta_k^{-1}(\xi)$，$k=1,\cdots,N$ に関して

$$\langle\Psi|X(\xi_k)X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle d\xi_k$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Psi|X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\rho_k(X(n))\Phi\rangle\xi_k^{-n-1}d\xi_k$$

が成立する．

（4） 曲線 C の非特異点 P の局所座標 z に関して

$$\langle\Psi|X(P)Y(P')X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle$$
$$= \frac{l\cdot(X,Y)}{(z(P)-z(P'))^2}\langle\Psi|X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle$$
$$+\frac{1}{z(P)-z(P')}\langle\Psi|[X,Y](P')X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle$$
$$+\text{点 } P=P' \text{ の近傍で正則}$$

（5） Q_i の局所座標 z および $|v\rangle\in V_{\vec{\lambda}}=V_{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V_{\lambda_N}\subset\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ に対して

$$\langle\Psi|X(P)X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|v\rangle$$
$$= \frac{1}{z(P)-z(Q_i)}\langle\Psi|X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\rho_i(X)v\rangle$$
$$+\text{点 } P=Q_i \text{ の近傍で正則}$$

が成立する． □

上の定理にでてきた函数(正確には微分型式) F をカレントの相関函数

(correlation function of current)という．上の定理と同様にしてエネルギー運動量テンソルの相関函数も定義できる．

定理 4.43

(1)

$$\langle\Psi|T(z)X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dz^2dP_1dP_2\cdots dP_M$$
$$= \frac{1}{2(g^*+l)}\lim_{w\to z}\left\{\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\langle\Psi|J^a(z)J^a(w)X_1(P_1)\right.$$
$$X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dzdwdP_1dP_2\cdots dP_M$$
$$\left.-\frac{l\dim\mathfrak{g}}{(z-w)^2}\langle\Psi|X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dzdwdP_1dP_2\cdots dP_M\right\}$$

とおくとこれは矛盾なく定義でき，かつ $k=1,\cdots,N$ に対して

$$\langle\Psi|T(\xi_k)X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle d\xi_k^2dP_1dP_2\cdots dP_M$$
$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Psi|X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\rho_k(L_n)\Phi\rangle\xi_k^{-n-2}d\xi_k^2dP_1dP_2\cdots dP_M$$

が成り立つ．

(2)　正則な座標変換 $w=w(z)$ に対して

$$\langle\Psi|T(w)X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dw^2dP_1dP_2\cdots dP_M$$
$$=\langle\Psi|T(z)X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dz^2dP_1dP_2\cdots dP_M$$
$$-\frac{c_v}{12}\{w(z);z\}\langle\Psi|X_1(P_1)X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dz^2dP_1dP_2\cdots dP_M$$

が成立する．ここで $\{w(z);z\}$ は Schwarz 微分である．　□

この定理(2)から分かるようにエネルギー運動量テンソル $T(z)(dz)^2$ は $K_C^{\otimes 2}$ の有理型切断とは少しずれていて，座標のとり方によって Schwarz 微分の差がでてくる．これは Virasoro 代数が中心荷電をもつことに対応している．

(g)　$\mathbb{P}^1$ と楕円曲線

ここでは $\mathbb{P}^1$ と楕円曲線の場合にカレントとエネルギー運動量テンソルの相関函数を計算してみよう．

いつものように $\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と考え，複素平面 $\mathbb{C}$ の座標を z と記す．正

整数 $N \geqq 1$ に対して $\mathbb{P}^1$ の N 個の点 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ を選び

$$\xi_j = \begin{cases} z - z_j, & z_j \neq \infty \\ 1/z, & z_j = \infty \end{cases}$$

とおく．そこで形式近傍をもった N 点付射影直線 $\mathfrak{X} = (\mathbb{P}^1; z_1, \cdots, z_N; \xi_1, \cdots, \xi_N)$ を考える．$\mathbb{P}^1$ 上には正則 1 次微分型式は存在しないので定理 4.42(5) より $X \in \mathfrak{g}$ と $|v\rangle \in V_{\vec{\lambda}}$ に対して

$$\langle \Psi | X(z) | v \rangle dz = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{z - z_j} \langle \Psi | \rho_j(X) v \rangle dz \tag{4.47}$$

が成立する．もし z_j のうちの 1 点，たとえば z_1 が無限遠点 ∞ であれば，(4.47)の項

$$\frac{1}{z - z_1} \langle \Psi | \rho_1(X) v \rangle dz$$

は消えてしまう．これは無限遠点 ∞ での 1 次微分型式

$$\sum_{j=2}^{N} \frac{1}{z - z_j} \langle \Psi | \rho_j(X) v \rangle dz$$

の留数はゲージ条件によって

$$-\sum_{j=2}^{N} \langle \Psi | \rho_j(X) v \rangle = \langle \Psi | \rho_1(X) v \rangle$$

と書けることによる．エネルギー運動量テンソルに関しては，$X \in \mathfrak{g}$ に対して $\langle \Psi | X(z) X(w) | v \rangle dz dw$ をまず考える．$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上には正則 2 次微分型式は存在しないので定理 4.43 より

$$\begin{aligned} \langle \Psi | X(z) X(w) | v \rangle dz dw &= \frac{l \cdot (X, X)}{(z-w)^2} \langle \Psi | v \rangle dz dw \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{z - z_j} \langle \Psi | X(w) | \rho_j(X) v \rangle dz dw \end{aligned} \tag{4.48}$$

を得る．式(4.47)よりこの式は

(4.49)

$$\langle\Psi|X(z)X(w)|v\rangle dzdw$$
$$= \frac{l\cdot(X,X)}{(z-w)^2}\langle\Psi|v\rangle dzdw + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(z-z_j)(w-z_k)}\langle\Psi|\rho_j(X)\rho_k(X)v\rangle dzdw$$

と書き直すことができる．もし $z_1=\infty$ であれば上と同様にして z_1 の項はなくなる．式(4.49)と定理 4.43 よりエネルギー運動量テンソルの相関函数は $\langle\Psi|\in\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{X})$ と $|v\rangle\in V_{\vec{\lambda}}$ に対して

(4.50)
$$\langle\Psi|T(z)|v\rangle(dz)^2 = \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{j,k}\frac{1}{(z-z_j)(z-z_k)}\cdot\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\langle\Psi|\rho_j(J^a)\rho_k(J^a)|v\rangle(dz)^2$$

となる．そこで定理 4.40 の記号を用いて

(4.51)
$$\Omega_{jk} = \sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\rho_j(J^a)\rho_k(J^a)$$
$$\langle\psi| = p(\langle\Psi|)\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_{\vec{\lambda}},\mathbb{C})$$

とおくと

(4.52)
$$\langle\Psi|T(z)|v\rangle(dz)^2 = \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\langle\psi|\Omega_{jk}|v\rangle}{(z-z_j)(z-z_k)}(dz)^2$$

なる表示を得る．ただし，$z_1=\infty$ のときはこの表示式は

(4.53)
$$\langle\Psi|T(z)|v\rangle(dz)^2 = \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{j=2}^{N}\sum_{k=2}^{N}\frac{\langle\psi|\Omega_{jk}|v\rangle}{(z-z_j)(z-z_k)}(dz)^2$$

となる．

次に楕円曲線の場合を考えよう．上半平面の点 $\tau\in H$ から定まる楕円曲線 $E_\tau=\mathbb{C}/(1,\tau)$ に対して形式近傍をもった1点付楕円曲線 $\mathfrak{X}=(E;[0];z)$ を考えよう．ここで $[0]$ は楕円曲線の原点であり，z は $\mathbb{C}$ の座標を原点での局所座標と考えたものである．楕円曲線上の任意の点は平行移動によって原点に移すことができるので1点付楕円曲線はこの形のものを考えれば十分であることに注意する．共形ブロックの空間 $\mathcal{V}_{\lambda}^{\dagger}(\mathfrak{X})$ はゲージ条件

$$\langle\Psi|X\otimes\wp^{(n)}(z)=0,\quad n=0,1,\cdots$$
$$\langle\Psi|X\otimes 1=0$$

で与えられる．ここで $\wp(z)$ は Weierstrass の $\wp$ 函数である．任意の元 $\langle\Psi|\in\mathcal{V}_\lambda^\dagger(\mathfrak{X})$，$X\in\mathfrak{g}$，$|v\rangle\in V_\lambda$ に対して 1 次微分型式 $\langle\Psi|X(z)|v\rangle dz$ は展開

$$\begin{aligned}\langle\Psi|X(z)|v\rangle dz &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Psi|X(n)v\rangle z^{-n-1}dz\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\langle\Psi|X(-n)v\rangle z^{n-1}dz\end{aligned}$$

をもつ．楕円曲線 E_τ 上には 1 点でのみ 1 位の極をもち，他では正則な有理型 1 次微分型式は存在しないので，$\langle\Psi|X(z)|v\rangle dz$ は正則 1 次微分型式である．したがって

$$\langle\Psi|X(z)|v\rangle dz = \langle\Psi|X(-1)|v\rangle dz \tag{4.54}$$

が成立し，さらに

$$\langle\Psi|X(-n)|v\rangle = 0,\quad n\neq 1 \tag{4.55}$$

が成り立つことが分かる．定理 4.42 より $\langle\Psi|\in\mathcal{V}_\lambda^\dagger(\mathfrak{X})$，$X\in\mathfrak{g}$ および元 $|v\rangle\in V_\lambda$ に対して

$$\langle\Psi|X(z)X(w)|v\rangle dzdw = \langle\Psi|X(-1)X(-1)v\rangle dzdw$$

が成り立つことが分かる．したがって定理 4.43 より，任意の元 $|v\rangle\in V_\lambda$ に対して

$$\langle\Psi|T(z)|v\rangle dz^2 = \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\langle\Psi|J^a(-1)J^a(-1)|v\rangle dz^2$$

が成り立つ．再び定理 4.43(1) より

$$\begin{aligned}\langle\Psi|T(z)|v\rangle dz^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\Psi|L_n v\rangle z^{-n-2}dz^2\\ &= \langle\Psi|L_0 v\rangle\wp(z)dz^2+\langle\Psi|L_{-2}v\rangle dz^2+\cdots\\ &= \Delta_\lambda\langle\Psi|v\rangle\wp(z)dz^2+\langle\Psi|L_{-2}v\rangle dz^2+\cdots\\ &= \langle\Psi|L_{-2}v\rangle dz^2\end{aligned} \tag{4.56}$$

が成立する．特に

$$\langle\Psi|L_{-1}v\rangle = 0 \tag{4.57}$$

が成立する．

(h)　分解定理

形式近傍をもつ安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}=(C;Q_1,\cdots,Q_N;\eta_1,\cdots,\eta_N)$ の底曲線 C が通常2重点 P をもつ場合を考える．2重点 P の正規化から定まる自然な写像を $\nu\colon \widetilde{C}\to C$ と記す．$\nu^{-1}(P)=\{P',P''\}$ とおき，点 P' および P'' の局所座標をそれぞれ η',η'' とおく．このとき，次の重要な分解定理が成立する．

定理 4.44 (分解定理)　上記の仮定のもとで標準的な同型

$$\bigoplus_{\mu\in P_l}\mathcal{V}^{\dagger}_{\mu,\mu^{\dagger},\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{X}})\simeq\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$$

が存在する．この同型は $|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\rangle\in V_{\mu}\otimes V_{\mu^{\dagger}}$，$\mu\in P_l$ を固定すると一意的に定まる．ただし $\widetilde{\mathfrak{X}}=(\widetilde{C};Q_1,\cdots,Q_N,P',P'';\eta_1,\cdots,\eta_N,\eta',\eta'')$ とおく．

［証明］　$V_{\mu}\otimes V_{\mu^{\dagger}}$ 上への $\mathfrak{g}$ の対角作用によって $V_{\mu}\otimes V_{\mu^{\dagger}}$ は左 $\mathfrak{g}$ 加群となり重複度1の自明な $\mathfrak{g}$ 部分加群を含む．$|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\rangle$ を自明な $\mathfrak{g}$ 部分加群の基底とする．すなわちすべての $X\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\rho_1(X)|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\rangle+\rho_2(X)|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\rangle=0$$

が成り立つ．

さて $\mathcal{H}_{\mu,\mu^{\dagger},\vec{\lambda}}$ は部分空間

$$\mathcal{H}_{\mu,\mu^{\dagger},\vec{\lambda}}\supset|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\rangle\otimes\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\simeq\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

を含んでいる．任意の元 $\langle\widetilde{\Psi}|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\mu,\mu^{\dagger},\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{X}})$ に対して $\langle\Psi|\in\mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}$ を

$$\langle\Psi|\Phi\rangle=\langle\widetilde{\Psi}|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\otimes\Phi\rangle$$

と定義する．ここで $|\Phi\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ である．すると有理型函数

$$f\in H^0\left(C,\mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N}Q_j\right)\right)$$

に対して

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\langle\Psi|\rho_j(X[f])|\Phi\rangle&=\sum_{j=1}^{N}\langle\widetilde{\Psi}|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\otimes\rho_j(X[f])\Phi\rangle\\&=\sum_{j=1}^{N+2}\langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X[f])|0_{\mu,\mu^{\dagger}}\otimes\Phi\rangle=0\end{aligned}$$

なぜならば f を $\widetilde{C}$ の有理型函数とみると $f(P')=f(P'')$ でありかつ

$$\rho_{P'}(X[f])|0_{\mu,\mu^\dagger}\rangle + \rho_{P''}(X[f])|0_{\mu,\mu^\dagger}\rangle = 0$$

となるからである．よってすべての $f \in H^0\left(C, \mathcal{O}_C\left(*\sum_{j=1}^{N} Q_j\right)\right)$ に対して

$$\sum_{j=1}^{N} \langle \Psi|\rho_j(X[f]) = 0$$

が成り立つ．したがって標準的な $\mathbb{C}$ 線型写像

$$\iota_\mu\colon\ \mathcal{V}_{\mu,\mu^\dagger,\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{X}}) \longrightarrow \mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$$

が存在する．写像 ι_μ が単射であることを示そう．そのためにまず $\langle\Psi| = \iota_\mu(\langle\widetilde{\Psi}|)$, $\langle\widetilde{\Psi}| \in \mathcal{V}_{\mu,\mu^\dagger,\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{X}})$ に対して

$$\langle\Psi|X(P)|\Phi\rangle dP = \langle\widetilde{\Psi}|X(P)|0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\Phi\rangle dP \tag{4.58}$$

が成り立つことを示そう．前節の最初の部分の議論により，等式(4.58)の左辺は Q_j での形式座標 ξ_j に関して展開すると

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\Psi|\rho_j(X(n))|\Phi\rangle \xi_j^{-n-1} d\xi_j$$

となる．同様に(4.58)の右辺は

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\widetilde{\Psi}|\rho_j(X(n))|0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\Phi\rangle \xi_j^{-n-1} d\xi_j &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\widetilde{\Psi}|0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\rho_j(X(n))\Phi\rangle \xi_j^{-n-1} d\xi_j \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\Psi|\rho_j(X(n))|\Phi\rangle \xi_j^{-n-1} d\xi_j\end{aligned}$$

したがって(4.58)が成り立つ．同様の議論により

$$\begin{aligned}&\langle\Psi|X_1(P_1)\cdots X_M(P_M)|\Phi\rangle dP_1\cdots dP_M \\ &\quad = \langle\widetilde{\Psi}|X_1(P_1)\cdots X_M(P_M)|0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\Phi\rangle dP_1\cdots dP_M\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．さて $\langle\Psi|=0$ と仮定する．定理 4.39(3) より

$$\langle\widetilde{\Psi}|X_2(P_2)\cdots X_M(P_M)|\rho_{P'}(X_1(n))0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\Phi\rangle = 0$$

を得る．さらに

$$\langle\widetilde{\Psi}|\rho_{P'}(X_2(n_2)X_1(n_1))0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\Phi\rangle = 0$$

$$\langle\widetilde{\Psi}|\rho_{P'}(X_1(n_1))\rho_{P''}(X_2(n_2))0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\Phi\rangle = 0$$

$$\langle\widetilde{\Psi}|\rho_{P''}(X_1(n_1)X_2(n_2))0_{\mu,\mu^\dagger}\otimes\Phi\rangle = 0$$

が成立する．$\mathcal{H}_\mu\otimes\mathcal{H}_{\mu^\dagger}$ は既約 $\hat{\mathfrak{g}}\times\hat{\mathfrak{g}}$ 加群であるので，同様の議論を繰り返す

ことによって，任意の $\widetilde{\Phi}\in\mathcal{H}_{\mu,\mu^\dagger,\vec{\lambda}}$ に対して

$$\langle\widetilde{\Psi}|\widetilde{\Phi}\rangle=0$$

が成立することが分かる．したがって ι_μ は単射である．

そこで $\mathbb{C}$ 線型写像

$$\iota\colon\ \bigoplus_{\mu\in P_l}\mathcal{V}_{\mu,\mu^\dagger,\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{X}})\xrightarrow{\oplus\iota_\mu}\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$$

が単射であることおよび全射であることを示す必要があるが証明は Ueno [93]に譲る． ∎

系 4.45　標準的な同型

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})\simeq\bigoplus_{\mu\in P_l}\mathcal{V}_{\mu,\mu^\dagger,\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{X}})$$

が存在する． □

次節で $\dim\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ は曲線の種数 g と $\vec{\lambda}$ のみに依存し，他のデータにはよらないことを示す．したがって，非特異曲線を通常2重点をもつ曲線に退化させ，$\dim\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ の計算は種数0の曲線の場合に帰着することができる．この場合，定理4.40により共形ブロックの計算は比較的簡単になる．

§4.3　共形ブロックの層と射影接続

この節では形式近傍をもった安定 N 点付曲線の族に対して共形ブロックの層を定義し，その基本的性質を記すことにする．

(a)　曲線族と共形ブロック

形式近傍をもった種数 g の安定 N 点付曲線の族 $\mathfrak{F}=(\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{B};s_1,\cdots,s_N;\eta_1,\cdots,\eta_N)$ を考える．ここでは $\mathcal{B}$ は有限次元複素多様体と仮定し，$\mathfrak{F}$ の各ファイバーは§4.1の条件(Q)を満足すると仮定する．ここでは族 $\mathfrak{F}$ に共形ブロックの層 $\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ を対応させることを考える．共形ブロック層は連接 $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ 加群であることが示される．

定義 4.46　$\mathcal{B}$ 上のアフィン Lie 代数の層 $\hat{\mathfrak{g}}_N(\mathcal{B})$ は

$$\hat{\mathfrak{g}}_N(\mathcal{B}) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}((\xi_j)) \right) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \cdot c$$

に $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 双線型である次の交換関係を導入したものである．

$$\begin{aligned}
&[(X_1 \otimes f_1, \cdots, X_N \otimes f_N), (Y_1 \otimes g_1, \cdots, Y_N \otimes g_N)] \\
&\quad = ([X_1, Y_1] \otimes (f_1 g_1), \cdots, [X_N, Y_N] \otimes (f_N g_N)) \\
&\qquad \oplus \left\{ \sum_{j=1}^{N} (X_j, Y_j) \operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(g_j df_j) \right\} \cdot c
\end{aligned}$$

ただしここで c は中心に属し，$X_j, Y_j \in \mathfrak{g}$，$f_j, g_j \in \mathcal{O}_{\mathcal{B}}((\xi_j))$ である． □

そこで

$$S = \sum_{j=1}^{N} s_j(\mathcal{B}), \quad \pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(*S)) = \varinjlim_{k} \pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(kS))$$

とおき

$$\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(*S)) \tag{4.59}$$

と定義する．

形式近傍 η_j より $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の単射準同型写像

$$\tilde{t}\colon\ \pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(*S)) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}((\xi_j))$$

が定義でき，これによって $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F})$ を $\hat{\mathfrak{g}}_N(\mathcal{B})$ の Lie 部分代数の層とみることができる．非負整数 l を固定しレベルと呼ぶ．任意の $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \in (P_l)^N$ に対して

$$\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}) = \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{\vec{\lambda}} \tag{4.60}$$

$$\mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}) = \underline{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}), \mathcal{O}_{\mathcal{B}}) \tag{4.61}$$

とおく．(4.26)で定義された対写像から $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 対写像

$$\langle\ |\ \rangle\colon\ \mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \tag{4.62}$$

が定義できる．この対写像は以下に導入するフィルターに関して完全である．

Lie 代数の層 $\hat{\mathfrak{g}}_N(\mathcal{B})$ は $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ に

$$\left(\left(X_1 \otimes \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^{(1)} \xi_1^n \right), \cdots, \left(X_N \otimes \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^{(N)} \xi_N^n \right) \right) (F \otimes |\Psi\rangle) \tag{4.63}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n^{(j)} F) \otimes \rho_j(X_j(n)) |\Psi\rangle$$

で作用する．$\widehat{\mathfrak{g}}_N(\mathcal{B})$ の $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathcal{B})$ への作用は双対作用，すなわち任意の $a \in \widehat{\mathfrak{g}}_N$ に対して

$$\langle \Psi a | \Phi \rangle = \langle \Psi | a \Phi \rangle \tag{4.64}$$

で定義する．以上の準備のもとに

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}) = \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}) / \widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F}) \mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}) \tag{4.65}$$

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F}) = \underline{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}}(\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}), \mathcal{O}_{\mathcal{B}}) \tag{4.66}$$

とおく．これらは $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群である．層 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ を族 $\mathfrak{F}$ に付随する共形ブロックのなす層と呼び $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ を双対共形ブロックのなす層と呼ぶ．

次の定理は，共形ブロックの有限次元性の証明と同様の考え方で証明することができる．

定理 4.47　共形ブロックのなす層 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ および双対共形ブロックのなす層 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ が有限 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群である．　□

さらに定理 4.35 より次の定理を示すことができる．

定理 4.48　形式近傍をもった安定 N 点付曲線の 2 個の族 $\mathfrak{F}, \widetilde{\mathfrak{F}}$ が同一の 1 次の無限小近傍をもった安定 N 点付曲線の族を定めれば標準的な同型

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}) \simeq \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\widetilde{\mathfrak{F}})$$

$$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F}) \simeq \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\widetilde{\mathfrak{F}})$$

が存在する．　□

これらの層がさらに局所自由層であることを証明するために，これらの層に作用する微分作用素の層を定義する．すなわち，

$$\bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}((\xi_j^{-1})) \frac{d}{d\xi_j}$$

の $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 部分加群の層 $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ を定義し，この層が共形ブロックのなす層 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ および双対共形ブロックのなす層 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に 1 次微分作用素として作用することを示そう．この作用によって射影的接続が定義できることは後に示す．以

下の議論は Tsuchiya–Ueno–Yamada [91]のように，形式近傍をもった安点 N 点付曲線のモジュライ空間上で行なうのが理論的に自然であるが，ここでは Ueno [93]で行なった簡易版の議論で満足することにしよう．

種数 g の安定 N 点付曲線の普遍族 $\mathfrak{F}^{(0)}=(\pi\colon \mathcal{C}\to\mathcal{B}; s_1,\cdots,s_N)$ に対してファイバーの 2 重点の軌跡を Σ と記し $D=\pi(\Sigma)$ とおく．Σ は $\mathcal{C}$ の余次元 2 の部分複素多様体であり，D は $\mathcal{B}$ の因子である．因子 D の各既約成分 D_i, $i=1,2,\cdots,k$ は非特異である．形式近傍

$$\eta_j\colon \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}/s_j(\mathcal{B})}\simeq\mathcal{O}_{\mathcal{B}}[[\xi]],\quad j=1,2,\cdots,N$$

に関して $\eta_j^{-1}(\xi)$ は $s_j(\mathcal{B})$ の正則座標であると仮定しても定理 4.48 によって一般性を失わない．以下，次の記号を使用する．

$$S_j=s_j(\mathcal{B}),\quad S=\sum_{j=1}^{N}S_j,\quad \xi_j=\eta_j^{-1}(\xi)$$

すると $\mathfrak{F}=(\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{B}; s_1,\cdots,s_N;\eta_1,\cdots,\eta_N)$ は種数 g の形式近傍をもった安定 N 点付曲線の族である．各 $\vec{\lambda}\in(P_l)^{\oplus N}$ に対して共形ブロックのなす層 $\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ および双対共形ブロックのなす層 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ が定義できる．これらはそれぞれ $\mathcal{H}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ の部分層および，$\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ の商層である．

まず $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の完全列

$$0\longrightarrow\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(mS)\longrightarrow\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(mS)\longrightarrow\bigoplus_{j=1}^{N}\bigoplus_{k=0}^{m}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}\xi_j^{-k}\frac{d}{d\xi_j}\longrightarrow 0$$

に注意する．これより $m\geqq 4g-3$ のとき

$$(4.67)\quad 0\to\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(mS)\xrightarrow{b_m}\bigoplus_{j=1}^{N}\bigoplus_{k=0}^{m}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}\xi_j^{-k}\frac{d}{d\xi_j}\xrightarrow{\vartheta_m}R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(-S)\to 0$$

を得る．したがって m に関する帰納的極限をとることによって $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の完全列

$$(4.68)\quad 0\to\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*S)\xrightarrow{b}\bigoplus_{j=1}^{N}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}[\xi_j^{-1}]\frac{d}{d\xi_j}\xrightarrow{\vartheta}R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(-S)\to 0$$

を得る．ここで写像 b および b_m は ξ_j に関する Laurent 展開であることに注意する．共形ブロック層および双対共形ブロック層に作用する 1 次微分作用素の層を定義するために完全列(4.68)を以下のように変形する．

π のファイバーに接する接ベクトルの層を $\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$ と記すと次の完全列がある．

$$0 \longrightarrow \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \longrightarrow \Theta_{\mathcal{C}} \xrightarrow{d\pi} \pi^*\Theta_{\mathcal{B}} \longrightarrow 0$$

そこで

$$\Theta'_{\mathcal{C},\pi} = d\pi^{-1}(\pi^{-1}\Theta_{\mathcal{B}}(-\log D))$$

とおくと，$\Theta'_{\mathcal{C},\pi}$ は Σ に接し，その水平成分は π の各ファイバー上では定数となる $\mathcal{C}$ 上のベクトル場のなす層である．すなわち $\Theta'_{\mathcal{C},\pi}$ は

$$a(z,u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{m} b_i(u)u_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=m+1}^{n} b_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}$$

の形のベクトル場の芽のなす層である．ここで $(z, u_1, \cdots, u_n)$ は写像 π が射影

$$\pi(z, u_1, \cdots, u_n) = (u_1, \cdots, u_n)$$

と表現され，$\pi(\Sigma) = D$ は方程式

$$u_1 \cdot u_2 \cdots u_m = 0$$

で与えられる $\mathcal{C}$ の局所座標である．

さらに一般に層 $\Theta'_{\mathcal{C}}(mS)_\pi$ は

$$A(z,u)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=1}^{m} B_i(u)u_i\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=m+1}^{n} B_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}$$

の形のベクトル場の芽のなす層として定義できる．ここで $A(z,u)$ は S に沿って高々 m 位の極をもつ有理型函数である．すると完全列

(4.69)　$$0 \to \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(mS) \to \Theta'_{\mathcal{C}}(mS)_\pi \xrightarrow{d\pi} \pi^{-1}\Theta_{\mathcal{B}}(-\log D) \to 0$$

が存在することが分かる．

層 $\Theta'_{\mathcal{C}}(mS)_\pi$ はベクトル場の通常のブラケット積によって Lie 代数の層の構造をもち，上の完全列は Lie 代数の層の完全列になっている．

(4.69)より $m > \dfrac{1}{N}(2g-2)$ のとき $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の完全列

(4.70)　$$0 \to \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(mS) \to \pi_*\Theta'_{\mathcal{C}}(mS)_\pi \xrightarrow{d\pi} \Theta_{\mathcal{B}}(-\log D) \to 0$$

を得る．この完全列は Lie 代数の層の完全列でもある．m に関する帰納的極限をとることによって完全列

(4.71)　$$0 \to \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*S) \to \pi_*\Theta'_{\mathcal{C}}(*S)_\pi \xrightarrow{d\pi} \Theta_{\mathcal{B}}(-\log D) \to 0$$

を得る．完全列(4.68)と(4.71)の関係は次の可換図式で与えられる．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*S) & \to & \pi_*\Theta'_{\mathcal{C}}(*S)_\pi & \xrightarrow{d\pi} & \Theta_{\mathcal{B}}(-\log D) & \to 0 \\ & & \| & & \downarrow p & & \downarrow \rho & \\ 0 & \to & \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*S) & \to & \bigoplus_{j=1}^{N}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}[\xi_j^{-1}]\dfrac{d}{d\xi_j} & \xrightarrow{\vartheta} & R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(-S) & \to 0 \end{array}$$

ここで，ρ は族 $\mathfrak{F}^{(0)}$ の小平–Spencer 写像であり，p は $\pi_*\Theta_{\mathcal{C}}(mS)_\pi$ に属するベクトル場の $s_j(\mathcal{B})$ を中心とする Laurent 展開の $\dfrac{d}{d\xi_j}$ の係数の非正の項をとり出す写像である．考察している族 $\mathfrak{F}^{(0)}$ は普遍族であるので小平–Spencer 写像 ρ は $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群としての同型写像である．したがって p は同型写像である．そこで $s_j(\mathcal{B})$ を中心とする Laurent 展開の $\dfrac{d}{d\xi_j}$ の部分をとり出す写像を

$$\widetilde{p}\colon\ \pi_*\Theta'_{\mathcal{C}}(*S)_\pi \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}((\xi_j))\frac{d}{d\xi_j}$$

とおく．p が同型写像であるので $\widetilde{p}$ は単射である．さらに

$$\mathcal{L}(\mathfrak{F}) := \widetilde{p}(\pi_*\Theta'_{\mathcal{C}}(*S)_\pi)$$

とおくと，$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の完全列

(4.72)　$$0 \longrightarrow \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*S) \xrightarrow{\ t\ } \mathcal{L}(\mathfrak{F}) \xrightarrow{\ \theta\ } \Theta_{\mathcal{B}}(-\log D) \longrightarrow 0$$

を得る．$\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ の Lie ブラケット積 $[\ ,\ ]_d$ は写像 $\widetilde{p}$ によって $\pi_*\Theta'_{\mathcal{C}}(*S)_\pi$ のブラケット積によって定義する．したがって $\vec{l},\vec{m}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ に対して

(4.73)　$$[\vec{l},\vec{m}]_d = [\vec{l},\vec{m}]_0+\theta(\vec{l})(\vec{m})-\theta(\vec{m})(\vec{l})$$

が成立することが分かる．ただし，ここで $[\ ,\ ]_0$ はベクトル場の通常のブラケット積であり，$[\ ,\ ]_0$ の

$$\vec{m} = \left(m_1\frac{d}{d\xi_1},\cdots,m_N\frac{d}{d\xi_N}\right)$$

への作用は

$$\left(\theta(\vec{l})(m_1)\frac{d}{d\xi_1},\cdots,\theta(\vec{l})(m_N)\frac{d}{d\xi_N}\right)$$

で与えられる．すると完全列(4.72)は Lie 代数の層の完全列であることが分かる．

以上の準備のもとに $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ の $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ への作用を定義しよう．

定義 4.49　$\vec{l}=(\underline{l}_1,\cdots,\underline{l}_N)\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ の $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ への作用 $D(\vec{l})$ を

$$D(\vec{l})(F\otimes|\Phi\rangle)=\theta(\vec{l})(F)\otimes|\Phi\rangle-F\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}\rho_j(T[\underline{l}_j])|\Phi\rangle\right) \tag{4.74}$$

と定義する．ここで

$$F\in\mathcal{O}_{\mathcal{B}},\quad |\Phi\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

である． □

このとき次の事実が成り立つ．

命題 4.50　$\vec{l}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ の $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ への作用 $D(\vec{l})$ は次の性質をもつ．

（1）　任意の $f\in\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ に対して

$$D(f\vec{l})=fD(\vec{l})$$

が成立する．

（2）　$\vec{l},\vec{m}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ に対して

$$[D(\vec{l}),D(\vec{m})]=D([\vec{l},\vec{m}]_d)+\frac{c_v}{12}\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}\left(\frac{d^3l_j}{d\xi_j^3}m_jd\xi_j\right)\cdot id$$

が成立する．

（3）　$f\in\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ および $|\phi\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ に対して

$$D(\vec{l})(f|\phi\rangle)=(\theta(\vec{l})(f))|\phi\rangle+fD(\vec{l})|\phi\rangle$$

が成立する．すなわち $D(\vec{l})$ は $\theta(\vec{l})\neq0$ であれば1階の微分作用素である． □

そこで $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ の $\mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ への作用を

$$D(\vec{l})(F\otimes\langle\Psi|)=(\theta(\vec{l})F)\otimes\langle\Psi|+\sum_{j=1}^{N}F\cdot(\langle\Psi|\rho_j(T[\underline{l}_j]))\tag{4.75}$$

と定める．ここで

$$F\in\mathcal{O}_{\mathcal{B}},\quad \langle\Psi|\in\mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$$

である．すると $|\widetilde{\Phi}\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ および $\langle\widetilde{\Psi}|\in\mathcal{H}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ に対して

$$\{D(\vec{l})\langle\widetilde{\Psi}|\}|\widetilde{\Phi}\rangle+\langle\widetilde{\Psi}|\{D(\vec{l})|\widetilde{\Phi}\rangle\}=\theta(\vec{l})\langle\widetilde{\Psi}|\widetilde{\Phi}\rangle\tag{4.76}$$

が成立する．$D(\vec{l})$ は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に作用する．

命題 4.51　任意の $\vec{l}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ に対して

$$D(\vec{l})(\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B}))\subset\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$$

が成り立つ．したがって $D(\vec{l})$ は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に作用する．さらに，$\theta(\vec{l})\neq 0$ であれば1階の微分作用素である．

［証明］　$\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ の元は

$$F\otimes\left(\sum_{j=1}^{N}\rho_j(X\otimes t_j(h))|\Phi\rangle\right)$$

の形の元の1次結合である．ここで

$$F\in\mathcal{O}_{\mathcal{B}},\quad X\in\mathfrak{g},\quad h\in\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(*S),\quad |\Phi\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$$

であり，$t_j(h)$ は $S_j=s_j(\mathcal{B})$ での h のパラメータ ξ_j に関する Laurent 展開である．まず $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ の作用素として

(4.77)

$$\left[D(\vec{l}),\sum_{j=1}^{N}\rho_j(X\otimes t_j(h))\right]=\sum_{j=1}^{N}\rho_j\big(X\otimes\{\theta(\vec{l})(t_j(h))+\underline{l}_j(t_j(h))\}\big)$$

が成り立つことを示そう．ここで，$\theta(\vec{l})$ は $t_j(h)$ の係数に作用する．命題4.50より $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ 上の作用素として等式(4.77)が成立することを示せばよい．(4.74)より元 $|\Phi\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}$ に対して

$$\begin{aligned}
&D(\vec{l})\left(\sum_{j=1}^{N}\rho_j(X\otimes t_j(h))|\Phi\rangle\right)-\sum_{j=1}^{N}\rho_j(X\otimes t_j(h))(D(\vec{l})|\Phi\rangle)\\
&=\sum_{j=1}^{N}\{\rho_j(X\otimes\theta(\vec{l})(t_j(h)))-T[\underline{l}_j]\rho_j(X\otimes t_j(h))\}|\Phi\rangle\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{N}\rho_j(X\otimes t_j(h))T[\underline{l}_j]|\Phi\rangle\\
&=\sum_{j=1}^{N}\{\rho_j(X\otimes\theta(\vec{l})(t_j(h)))+\rho_j(X\otimes\underline{l}_j(t_j(h)))\}|\Phi\rangle
\end{aligned}$$

が成立する．しかし，$\theta(\vec{l})(t_j(h))+\underline{l}_j(t_j(h))$ は $\tau=\tilde{p}^{-1}(\vec{l})\in\pi_*(\Theta'_{\mathcal{C}}(*S)_\pi)$ に対する有理型函数 $\tau(h)$ の $s_j(\mathcal{B})$ での Laurent 展開に他ならない．∎

同様にして $D(\vec{l})$ が $\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に作用することを示すことができる．

系 4.52　$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群 $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ は $\mathcal{B}\setminus D$ 上局所自由層である．

［証明］　任意の点 $x\in\mathcal{B}\setminus D$ に対して

$$\mathfrak{F}_x:=(\,C_x=\pi^{-1}(x),s_1(x),\cdots,s_N(x);\eta_1|C_x,\cdots,\eta_N|C_x)$$

とおくと同型

$$\mathbb{C}_x \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}) \simeq \mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}_x)$$

が存在する．これはテンソル積の右完全性から従う．点 x の近傍での $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ の切断 $v_1, \cdots, v_m$ を $\{v_1(x), \cdots, v_m(x)\}$ が $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}_x)$ の基底になるように選ぶ．このとき，自明でない関係式

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m = 0 \tag{4.78}$$

が成立したと仮定する．ここで，a_i は点 x の近傍の正則函数である．仮定より

$$a_1(x) = a_2(x) = \cdots = a_m(x) = 0$$

が成立する．必要ならば順序を変えることによって

$$\begin{aligned} &a_1 \in \mathfrak{m}_x^k \setminus \mathfrak{m}_x^{k+1}, \\ &a_i \in \mathfrak{m}_x^l, \quad l \geqq k, \quad i = 2, 3, \cdots, m \end{aligned}$$

が成立するような正整数 k を選ぶことができる．このとき，式(4.78)を満足する a_i のうちで正整数 k が最小になるように a_i を選んでおく．x の近傍で定義された零点をもたない正則ベクトル場 τ を $\tau(a_1) \in \mathfrak{m}_x^{k-1}$ が成り立つようにとる．すると $\theta(\vec{l}) = \tau$ となる $\vec{l} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ が存在する．$\tau = \theta(\vec{l})$ を等式(4.78)に作用させた結果を

$$D(\vec{l})(v_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} v_j$$

と記すと

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\tau(a_i) + \sum_{j=1}^{m} a_j \alpha_{ji} \right) v_i = 0$$

を得る．この関係式は自明でなくかつ

$$\tau(a_1) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j1} \in \mathfrak{m}_x^{k-1}$$

が成り立つ．これは式(4.78)の a_i のとり方に反する．よって $v_1, \cdots, v_m$ は $\mathcal{O}_B$ 上1次独立である．これは $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ が $\mathcal{O}_B$ 加群として点 x の近傍で自由加群であることを意味する． ∎

この定理より次の二つの補題が直ちに従う.

補題 4.53　W は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ が局所自由層でない $\mathcal{B}$ の極大集合とすると W は $\mathcal{B}$ の解析的集合であり

$$W \subsetneq D$$

が成立する. □

実際には $W=\varnothing$ であるが，このことを証明するために系 4.52 を使う.

補題 4.54　$\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})|\mathcal{B}\setminus D$ は局所自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群である. また，$\mathcal{B}\setminus D$ の任意の部分多様体 Y に対して $\mathcal{O}_Y$ 加群の同型

$$\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}) \simeq \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}|Y)$$

が存在する. □

命題 4.55　任意の元 $\vec{l}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ に対して $\theta(\vec{l})\neq 0$ であれば $D(\vec{l})$ は $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ 上に 1 階の微分作用素として作用する.

［証明］　元

$$\langle\widetilde{\Psi}| \in \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$$

と任意の元 $X\in\mathfrak{g}$, $f\in\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(*S)$, $|\widetilde{\Phi}\rangle\in\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathcal{B})$ に対して，命題 4.51 および式(4.76)から

$$\{D(\vec{l})\langle\widetilde{\Psi}|\}(X\otimes f|\widetilde{\Phi}\rangle) = \theta(\vec{l})(\langle\widetilde{\Psi}|X\otimes f|\widetilde{\Phi}\rangle) - \langle\widetilde{\Psi}|\{D(\vec{l})(X\otimes f|\widetilde{\Phi}\rangle)\} = 0$$

が成り立つ. したがって

$$D(\vec{l})\langle\Psi| \in \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$$

が成立することが分かる. ■

(4.62)で与えられる対写像 $\langle\ |\ \rangle\colon \mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})\times\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})\to\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ から

$$\{D(\vec{l})\langle\Psi|\}|\Phi\rangle + \langle\Psi|\{D(\vec{l})|\Phi\rangle\} = \theta(\vec{l})(\langle\Psi|\Phi\rangle) \tag{4.79}$$

を得る.

(b)　射影的平坦接続

ここでは共形ブロックのなす層が射影的平坦接続をもつことを示す. この接続は非特異曲線に対応する部分 $\mathcal{B}\setminus D$ 上で定義され，特異曲線に対応する D 上で確定特異点をもっている. 形式近傍をもった安定 N 点付曲線の族 $\mathfrak{F}=(\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{B}; s_1,\cdots,s_N;\eta_1,\cdots,\eta_N)$ を考える. ここで，上と同様に $\mathfrak{F}^{(0)}:=$

$(\pi: \mathcal{C} \to \mathcal{B}; s_1, \cdots, s_N)$ は安定 N 点付曲線の普遍族であると仮定する.

命題 4.51 より層 $\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ および $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ に左から作用する. さらに $\theta(\vec{l}) \neq 0$ であれば $\vec{l} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ は 1 階の微分作用素として作用する(命題 4.55). 射影的平坦接続の存在を示すために, $\theta(\vec{l}) = 0$ の場合に $\vec{l}$ を詳しく考察しよう. 一般的な記号を使うが, 以下では主として非特異曲線の族の場合を考察する.

補題 4.56　種数 g の閉 Riemann 面 C および $H_1(C, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g\}$ に対して以下の性質をもつ $C \times C$ の 2 次有理型微分 $\omega \in H^0(C \times C, \Omega^2_{C \times C}(2\Delta))$ が存在する. ただし Δ は $C \times C$ の対角線集合である.

（1）　ω は対角線集合 Δ の近傍で

$$\omega(z, w) = \frac{1}{(z-w)^2} dz \wedge dw + \text{正則 2 次微分型式}$$

と書ける.

（2）　シンプレクティック基底 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g\}$ に対して $H^0(C, \Omega^1_C)$ の基底 $\{\omega_1, \cdots, \omega_g\}$ を

$$\int_{\alpha_i} \omega_j = \tau_{ij}, \quad \int_{\beta_i} \omega_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leqq i, j \leqq g$$

が成り立つように選び, 2 番目の変数に関して積分をすると

$$\int_{\alpha_i} \omega(z, w) = \omega_i(z), \quad \int_{\beta_i} \omega(z, w) = 0$$

が成り立つ.

［証明］　ベクトル $\vec{f} \in \mathbb{C}^g$ の Jacobi 多様体 $J(R)$ への像がテータ因子 Θ の非特異点であるように選ぶ. 点 $P, Q \in C$ を中心とする局所座標を z, w と記し, 点 $(P, Q) \in C \times C$ の近傍で $\omega(z, w)$ を

$$\omega(z, w) = \frac{\partial}{\partial z \partial w} \log \theta\left(\tau, \left(\int_z^w \omega_1, \cdots, \int_z^w \omega_g\right) + \vec{f}\right)$$

と定義すると上記の性質(1), (2)を満足する. ∎

この補題の ω はしばしば C の **2 次微分**(bidifferential)と呼ばれる. 上記

の性質(2)は本書では必要としない．また，性質(1)をしばしば

$$\mathrm{Res}^2(\omega)=1$$

と略記する．この証明から分かるように閉 Riemann 面の族が与えられたとき ω もパラメータに正則に依存するように構成できる．半安定曲線の場合は Fay [29]を参照されたい．

補題 4.57　$\mathcal{B}$ は十分小さくとり $\mathrm{Res}^2(\omega)=1$ を満足する 2 次微分

$$\omega\in H^0(\mathcal{C}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{C},\ \omega_{\mathcal{C}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{C}/\mathcal{B}}(2\Delta))$$

が存在すると仮定する．すると 2 次微分 ω のとり方に依存しない $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の準同型写像

$$a:\ \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*S)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$$

が一意的に定まる．このとき上の完全列(4.72)による $\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(*S)$ の像である $\vec{l}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ に対して $D(\vec{l})$ は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ 上に左から作用する線型作用素

$$D(\vec{l})=a(\vec{l})\cdot id$$

となり，$\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ 上には左から作用する線型作用素

$$D(\vec{l})=-a(\vec{l})\cdot id$$

となる．

［証明］　$\theta(\vec{l})=0$ であるので任意の $\langle\Psi|\in\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ と $|\Phi\rangle\in\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に対して

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\{D(\vec{l})|\Phi\rangle\}&=-\sum_{j=1}^N\langle\Psi|\rho_j(T[\underline{l}_j])|\Phi\rangle\\&=-\sum_{j=1}^N\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(l_j(\xi_j)\langle\Psi|T(\xi_j)|\Phi\rangle d\xi_j)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $\underline{l}_j=l_j(\xi_j)\dfrac{d}{d\xi_j}$ である．定理 4.43 より

$$\begin{aligned}&\langle\Psi|T(\xi_j)|\Phi\rangle(d\xi_j)^2\\&\quad=\lim_{\zeta_j\to\xi_j}\left\{\frac{1}{2(l+g^*)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\langle\Psi|J^a(\zeta_j)J^a(\xi_j)|\Phi\rangle d\zeta_jd\xi_j-\frac{c_v}{2(\zeta_j-\xi_j)^2}\langle\Psi|\Phi\rangle d\zeta_jd\xi_j\right\}\end{aligned}$$

である．そこで

(4.80)

$$\langle\Psi|\widetilde{T}(z)|\Phi\rangle(dz)^2$$
$$=\lim_{w\to z}\left\{\frac{1}{2(l+g^*)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\langle\Psi|J^a(w)J^a(z)|\Phi\rangle dwdz-\frac{c_v}{2}\omega(w,z)\langle\Psi|\Phi\rangle dwdz\right\}$$

と定義する．また $S_\omega(z)(dz)^2$ を

$$S_\omega(z)(dz)^2=6\lim_{w\to z}\left\{\omega(w,z)dwdz-\frac{dwdz}{(w-z)^2}\right\}$$

と定義する．$S_\omega(z)(dz)^2$ は射影接続(projective connection)と呼ばれることがある．$S_\omega(z)(dz)^2$ は2次微分 ω のみならず局所座標のとり方にも依存する．すなわち，他の局所座標をとると

$$S_\omega(w)(dw)^2=S_\omega(z)(dz)^2+\{w;z\}(dz)^2$$

が成り立つ．さて

$$\langle\Psi|T(\xi_j)|\Phi\rangle(d\xi_j)^2=\langle\Psi|\widetilde{T}(\xi_j)|\Phi\rangle(d\xi_j)^2+\frac{c_v}{12}\langle\Psi|\Phi\rangle S_\omega(\xi_j)(d\xi_j)^2$$

が成立している．したがって

(4.81)
$$\langle\Psi|\{D(\vec{l})|\Phi\rangle\}=-\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(l_j(\xi_j)\langle\Psi|\widetilde{T}(\xi_j)|\Phi\rangle d\xi_j)$$
$$-\frac{c_v}{12}\langle\Psi|\Phi\rangle\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(l_j(\xi_j)S_\omega(\xi_j)d\xi_j)$$

が成り立つ．一方，$l_j(z)\langle\Psi|\widetilde{T}(z)|\Phi\rangle dz$ は $s_j(\mathcal{B})$ でのみ極をもつ大域的に定義された有理型1次微分型式であるので上の式の右辺の第1項は0でなければならない．したがって

(4.82)
$$a_\omega(\vec{l})=-\frac{c_v}{12}\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(l_j(\xi_j)S_\omega(\xi_j)d\xi_j)$$

とおくと

$$\langle\Psi|\{D(\vec{l})|\Phi\rangle\}=a_\omega(\vec{l})\langle\Psi|\Phi\rangle$$

が成立する．$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ および $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ は $\mathcal{B}\setminus D$ 上では局所自由層であり，かつ互いに双対的であるので

$$D(\vec{l})|\Phi\rangle=a_\omega(\vec{l})|\Phi\rangle$$

が成立することが分かる．

次に，$a_\omega(\vec{l})$ は ω のとり方によらないことを示そう．他に $\mathrm{Res}^2(\omega')=1$ となる2次微分型式

$$\omega' \in H^0(\mathcal{C}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{C},\, \omega_{\mathcal{C}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{C}/\mathcal{B}}(2\Delta))$$

をとると $\omega-\omega'$ は $\mathcal{C}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{C}$ 上の正則2次微分型式である．したがって $S_\omega-S_{\omega'}$ は $\mathcal{C}$ 上の $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}^{\otimes 2}$ の正則切断である．そこで $t(\tau)=\vec{l}$ となる元 $\tau\in\pi_*\Theta_{\mathcal{C}}/\mathcal{B}(*S)$ をとると，$\tau(z)(S_\omega(z)-S_{\omega'}(z))dz$ は $\mathcal{C}$ 上の有理型微分型式である．したがって

$$\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(l(\xi_j)(S_\omega(\xi_j)-S_{\omega'}(\xi_j))d\xi_j)=0$$

が成り立つ．よって

$$a_\omega(\vec{l})=a_{\omega'}(\vec{l})$$

が成立する．これで，最初の部分が示された．残りは式(4.79)より従う． ∎

上の証明より次の系が従う．

系 4.58 上の補題と同じ仮定の下で，各 $\vec{l}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ に対して(4.82)によって $a_\omega(\vec{l})$ を定義すると

$$a_\omega:\ \mathcal{L}(\mathfrak{F})\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$$

は $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の準同型写像である． □

この系では $\vec{l}$ は大域的な有理型ベクトル場の像とは限らないので $a_\omega(\vec{l})$ は ω のとり方に依存することに注意する．

以上の準備のもとに $\mathcal{B}$ が十分小さいとき $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ と $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ 上に接続を定義する．$\mathrm{Res}^2(\omega)=1$ となる2次微分

$$\omega\in H^0(\mathcal{C}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{C},\, \omega_{\mathcal{C}\times_{\mathcal{B}}\mathcal{C}/\mathcal{B}}(2\Delta))$$

を固定する．各元 $X\in\Theta_{\mathcal{B}}(-\log D)$ に対して $\theta(\vec{l})=X$ となる元 $\vec{l}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ を選ぶ．左から $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に作用する $\nabla_X^{(\omega)}$ を

$$\nabla_X^{(\omega)}([|\Phi\rangle])=D(\vec{l})([|\Phi\rangle])-a_\omega(\vec{l})([|\Phi\rangle]) \tag{4.83}$$

と定義する．ここで，$[|\Phi\rangle]$ は元 $|\Phi\rangle$ が定める $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ の元を意味する．このとき次の命題が成り立つ．

命題 4.59 作用素 $\nabla_X^{(\omega)}$ は矛盾なく定義でき，以下の性質をもつ．

$$\nabla_X^{(\omega)}([f|\Phi\rangle]) = X(f)[|\Phi\rangle] + f\nabla_X^{(\omega)}([|\Phi\rangle]) \tag{4.84}$$

ここで $f \in \mathcal{O}_\mathcal{B}$ である．よって対応 $X \mapsto \nabla_X^{(\omega)}$ は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ 上の接続を定義し，D に沿って確定特異点をもつ．

［証明］　他に $\theta(\vec{l}') = X$ となる $\vec{l}' \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ をとる．

$$a(\vec{l} - \vec{l}') = a_\omega(\vec{l}) - a_\omega(\vec{l}')$$

が成り立つ．一方，補題 4.57 より

$$(D(\vec{l}) - D(\vec{l}'))[|\Phi\rangle] = -\sum_{j=1}^{N} [|\Phi\rangle] = a(\vec{l} - \vec{l}')[|\Phi\rangle]$$

が成り立つので，$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})$ 上の作用素として

$$D(\vec{l}) - a_\omega(\vec{l}) \cdot id = D(\vec{l}') - a_\omega(\vec{l}') \cdot id$$

が成立する．したがって，$\nabla_X^{(\omega)}$ は $\vec{l}$ のとり方によらない．命題 4.50(3) より (4.84) が成立することが分かる．　■

定理 4.60　$\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^{\dagger}(\mathfrak{F})|\mathcal{B} \setminus D$ 上の接続 $\nabla^{(\omega)}$ は射影的に平坦である．　□

$\mathbb{P}^1$ のときは

$$\omega = \frac{dwdz}{(w-z)^2}$$

は大域的な微分型式であるので

$$a_\omega = 0$$

である．したがって，このときは接続は平坦である．式(4.52)より $\mathbb{P}^1$ のときの接続は Knizhnik–Zamodolchikov 方程式の非斉次形であることが分かる．(§4.4 を参照されたい．)

(c)　種数 1 の安定 1 点付曲線の族

以上の議論で残された課題は特異曲線に対応する点の近傍でも共形ブロックのなす層が局所自由層になることを証明することである．一般的に証明するためには記号が煩雑になるので，ここでは種数 1 の安定 1 点付曲線の普遍族の場合に証明を与える．一般の場合も基本的なアイディアは同一である．

まず，種数 1 の半安定曲線の族を構成しよう．$\mathbb{P}^1$ の原点 0 および無限遠点 ∞ の座標 z および w を通常のように

$$zw = 1$$

が成り立つようにとる．そこで

$$D = \{q \in \mathbb{C} \mid |q| < 1\}, \quad X = \{R \in \mathbb{P}^1 \mid |z(R)| < 1\},$$
$$Y = \{P \in \mathbb{P}^1 \mid |w(P)| < 1\}$$

とおき，さらに

$$S = \{(x, y, q) \in \mathbb{C}^3 \mid xy = q,\ |x| < 1,\ |y| < 1,\ |q| < 1\}$$
$$Z = \{(R, q) \in \mathbb{P}^1 \times D \mid R \in \mathbb{P}^1 \setminus \{X \cup Y\} \quad \text{または} \quad R \in X,\ |z(R)| > |q|\}$$
$$W = \{(P, q) \in \mathbb{P}^1 \times D \mid P \in \mathbb{P}^1 \setminus \{X \cup Y\} \quad \text{または} \quad P \in Y,\ |w(P)| > |q|\}$$

とおく．$S \cup Z \cup W$ 上に同値関係 $\sim$ を次のように導入する．

（1）　点 $(R, q) \in X \times D \cap Z$ と点 $(x, y, q') \in S$ は

$$(x, y, q') = \left(z(R), \frac{q}{z(R)}, q \right)$$

が成り立つとき同値である．

（2）　点 $(P, q) \in Y \times D \cap W$ と点 $(x, y, q') \in S$ は

$$(x, y, q') = \left(\frac{q}{w(P)}, w(P), q \right)$$

が成り立つとき同値である．

（3）　点 $(R, q) \in Z$ と点 $(P, q') \in W$ は

$$q' = q, \quad z(R)w(P) = q$$

が成り立つとき同値である．

$$\mathcal{E} = (S \cup Z \cup W)/\sim$$

とおくと $\mathcal{E}$ は2次元複素多様体である．点 $(x, y, q) \in S$, $(R, q) \in Z$ および点 $(P, q) \in W$ が定める $\mathcal{E}$ の点をそれぞれ $[(x, y, q)], [(R, q)]$ および $[(P, q)]$ と記す．このとき自然な正則写像

$$\pi \colon \mathcal{E} \longrightarrow D$$

が存在する．$q \in D$ に対して

$$S(q) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = q\}$$

$$Z(q) = \{\mathbb{P}^1 \setminus \{X \cup Y\}\} \cup \{R \in X \mid |z(R)| > |q|\}$$
$$W(q) = \{\mathbb{P}^1 \setminus \{X \cup Y\}\} \cup \{P \in Y \mid |w(P)| > |q|\}$$

とおく．以下，$\mathbb{P}^1$ を座標 w を使って

$$\mathbb{P}^1 = \{(w:1) \mid w \in \mathbb{C}\} \cup \{(1:0)\}$$

とみる．無限遠点を中心とする座標を使ったのは，楕円曲線を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の商空間と考えたいからである．このことは以下，自然に明らかになる．$q \neq 0$ のときは

$$\mathbb{P}^1 \setminus \{X \cup Y\} = \{(w:1) \mid |w| = 1\}$$
$$Z(q) = \{(w:1) \mid 1 \leqq |w| < 1/|q|\}$$
$$W(q) = \{(w:1) \mid |q| < |w| \leqq 1\}$$

と書き換えることができる．$S(q) \cup Z(q) \cup W(q)$ 上では上の同値関係は次のように書くことができる．

（1）　点 $(w:1) \in X \times q \cap Z(q) = \{w \mid 1 \leqq |w| < 1/|q|\}$ と点 $(x,y,q) \in S(q)$ は

$$(x,y,q) = (1/w, qw, q)$$

のとき同値である．

（2）　点 $(w':1) \in Y \times q \cap W(q) = \{w' \mid |q| < |w'| \leqq 1\}$ と点 $(x,y,q) \in S(q)$ は

$$(x,y,q) = (q/w', w', q)$$

のとき同値である．

$q \neq 0$ のとき点 $(x,y,q) \in S(q)$ は点 $(w:1) \in X \times q \cap Z(q)$（$|x| \leqq 1$ のとき）または点 $(w':1) \in Y \times q \cap W(q)$（$|y| \leqq 1$ のとき）と同値であることに注意する．したがって商多様体 $\mathcal{E}(q) = (S(q) \cup Z(q) \cup W(q))/\sim$ は $1 \leqq |w| < 1/|q|$ と $|q| < |w'| \leqq 1$ を $w' = qw$ で同一視することによって得られる．言い換えると商多様体 $\mathcal{E}(q)$ は楕円曲線 $E_{\langle q \rangle} = \mathbb{C}^*/\langle q \rangle$ に他ならない．ここで $\langle q \rangle$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の正則自己同型

$$w \longmapsto qw$$

から生成される無限巡回群である．したがって $\mathcal{E}(q)$ は $q \neq 0$ のとき楕円曲

線 $E_{\langle q\rangle}$ であり，$q=0$ のときは通常 2 重点をもった有理曲線である．$\mathcal{E}(q)$ は $\pi\colon \mathcal{E}\to D$ の点 q 上のファイバー $\pi^{-1}(q)$ であることに注意する．また $w=1$ に対応する $\mathcal{E}(q)$ の点 $[1]$ は楕円曲線の原点であることにも注意する．さらに $q=0$ のファイバー $\pi^{-1}(0)$ は点 $\infty=(0:1)$ と $0=(1:0)$ を同一視してできる通常 2 重点をもった有理曲線であることに注意する．

$q\neq 0$ のとき $\dfrac{dw}{w}$ は $\mathcal{E}(q)$ 上の正則 1 次微分型式であり，族 $\pi\colon \mathcal{E}\to D$ は点 q で普遍的である．写像

$$\begin{array}{rccc} o\colon & D & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ & q & \longmapsto & [(q,1,q)], \qquad (q,1,q)\in S \end{array}$$

は族 $\pi\colon \mathcal{E}\to D$ の正則切断 o を定義する．そこで座標をもった種数 1 の安定 1 点付曲線の族 $\mathfrak{F}=(\mathcal{E}\to D; o; u)$ を考えよう．ここで $u=w-1$ とおいた．

共形ブロックのなす層 $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ が D 上で局所自由層であることを証明しよう．$D\setminus\{0\}$ 上では層 $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ は局所自由であることは既に示されているので，必要なのは点 $q=0$ の近傍での考察である．

そこで原点 $q=0$ 上のファイバー $\mathcal{E}(0)$ のデータを基にして $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ の形式的切断をまず構成しよう．

$\mathcal{E}(0)$ の正規化写像

$$\nu\colon\ \widetilde{\mathcal{E}}(0)=\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathcal{E}(0)$$

と記すと，

$$\nu(0)=\nu(\infty)=\text{通常 2 重点}$$
$$\nu(1)=o(0)$$

となる．定理 4.44 より $\mathcal{V}_0^\dagger((\mathcal{E}(0); o(0), u))$ は標準的に

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{V}^\dagger_{\lambda^\dagger,\lambda,0}((\mathbb{P}^1;\infty,0,1;\eta,\xi,\xi-1))$$

と同型である．記号を簡単にするために

$$\mathcal{V}^\dagger_{\lambda^\dagger,\lambda,0}=\mathcal{V}^\dagger_{\lambda^\dagger,\lambda,0}((\mathbb{P}^1;\infty,1,0;\eta,\xi-1,\xi))$$

とおく．ベクトル空間 $\mathcal{V}^\dagger_{\lambda^\dagger,\lambda,0}$ は 1 次元であり，任意の $|v^\dagger\rangle\in\mathcal{H}_{\lambda^\dagger}$ および $|v\rangle\in\mathcal{H}_\lambda$ に対して

$$\langle\Psi|v^\dagger\otimes v\otimes 0\rangle = (v^\dagger|v)$$

を満足する元 $\langle\Psi|\in\mathcal{V}^\dagger_{\lambda^\dagger,\lambda,0}$ が存在する．

ここで $|0\rangle$ は $\mathcal{H}_0$ の最高ウェイトベクトルであり，$(\ |\ )$ は補題 4.19 で定義した双線型写像

$$\mathcal{H}_{\lambda^\dagger}\otimes\mathcal{H}_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}$$

である．そこで $\langle\Psi|$ から元

$$\langle\Psi^{(\lambda)}|\in\mathcal{V}^\dagger_0(\mathfrak{F})$$

を構成しよう．

任意の正整数 d に対して補題 4.19 より $\mathcal{H}_{\lambda^\dagger}(d)$ の基底 $\{v^k(d)\}$, $k=1,2,\cdots,m_d$ と $\mathcal{H}_\lambda(d)$ の基底 $\{v_k(d)\}$, $k=1,2,\cdots,m_d$ を

$$(v^j(d)|v_k(d)) = \delta^j_k$$

が成立するように選ぶことができる．任意の元 $|\phi\rangle\in\mathcal{H}_0$ に対して $\langle\Psi_d|\in\mathcal{H}^\dagger_0$ を

$$\langle\Psi_d|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{m_d}\langle\Psi|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes\phi\rangle$$

と定義する．そこで $\langle\Psi^{(\lambda)}|$ を

$$\langle\Psi^{(\lambda)}|\phi\rangle = \sum_{d=0}^{\infty}\langle\Psi_d|\phi\rangle q^d$$

と定義しよう．これは q に関する形式的べき級数であり，定義だけからは収束は分からない．後に，$q^{\Delta_\lambda}\langle\Psi^{(\lambda)}|\phi\rangle$ は Fuchs 型微分方程式の形式解であることを示し，Fuchs 型微分方程式の理論から形式解は実際に $q=0$ の近傍で収束することが分かる．特に $|\phi\rangle=|0\rangle$ のとき

$$q^{\Delta_\lambda}\langle\Psi^{(\lambda)}|0\rangle = \sum_{d=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_d}(v^i(d)|v_i(d))q^d = \sum_{d=0}^{\infty}\dim\mathcal{H}_\lambda(d)q^{\Delta_\lambda+d} \tag{4.85}$$

となるが，これは積分可能 $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群 $\mathcal{H}_\lambda$ の指標でありテータ函数を使って表示できることが分かっている(Kac [49])．したがってこの場合は形式的べき級数は収束することも分かる．実際には $q^{\Delta_\lambda}\langle\Psi^{(\lambda)}|0\rangle$ は $D\setminus\{0\}$ の多価正則函数である．

しかし，これらの事実は仮定せずに，とりあえず $\langle\Psi^{(\lambda)}|$ は $\mathcal{H}_0[[q]]$ の元であ

るとして議論を続けよう．まず，$\langle\Psi^{(\lambda)}|$ は形式的ゲージ条件を満足し，したがって $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ の原点での完備化の元を定めることを示そう．そのために，原点 [1] でのみ極をもつ楕円曲線 $\mathcal{E}(q)$ 上の有理型函数を考える．

(4.86) $$x(q,w) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q^n)^2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{wq^n}{(1-wq^n)^2}$$

(4.87) $$y(q,w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(1+wq^n)wq^n}{(1-wq^n)^3}$$

とおく．これは $x=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,z)$ とおくと

$$x(q,w) = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4\pi^2}\wp(z)$$
$$y(q,w) = \frac{\sqrt{-1}}{8\pi^3}\wp'(z)$$

と書くことができる．ここで，$\wp(z)$ は今までと同様に Weierstrass の $\wp$ 函数を意味する．このとき

$$x(q,qw) = x(q,w), \quad y(q,qw) = y(q,w),$$
$$x(q,w^{-1}) = x(q,w), \quad y(q,w^{-1}) = -y(q,w)$$

が成り立ち，さらに

$$x = x(q,w), \quad y = y(q,w),$$
$$g_2(q) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n}, \quad g_3(q) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(7n^5+5n^3)q^n}{1-q^n}$$

とおくと，方程式

(4.88) $$y^2-4x^3-x^2+g_2(q)x+g_3(q) = 0$$

を満足する．$x(q,w)$ は点 [1] でのみ 2 位の極をもち $y(q,w)$ は点 [1] でのみ 3 位の極をもつ．楕円函数の理論から $H^0(\mathcal{E}(q),\mathcal{O}(*[1]))$ の基底は $x(q,w)$ の単項式と $x(q,w)$ の単項式に $y(q,w)$ を掛けたものとからなることが知られている．さらに $x(q,w)$ は展開

$$x(q,w) = \frac{w}{(1-w)^2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left\{\sum_{m|l}(mw^m+mw^{-m}-2)\right\}q^l$$

をもつことに注意する．ここで $m|l$ は正整数 m は l の約数であることを意味

する．この展開式の q^l の係数は点 $0, 1$ と無限遠点 ∞ でのみ極をもつ $\mathbb{P}^1$ の有理型函数とみることができる．同様に $x(q,w)$ と $y(q,w)$ の多項式 $P(x,y)$ の q に関する展開式

$$(4.89)\quad P(x(q,w),y(q,w)) = Q_1(x(q,w))+Q_2(x(q,w))y(q,w) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(w)q^k$$

の q^k の係数 $f_k(w)$ は $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(*(\infty+1+0)))$ の元であることが分かる．

以上の準備のもとで，形式的ゲージ条件は

(4.90)

$$\begin{aligned}\langle \Psi^{(\lambda)}|X\otimes P(x(q,w),y(q,w))\phi\rangle &= \sum_{d=0}^{\infty}\langle\Psi_d|\sum_{k=0}^{\infty}(X\otimes f_k(w))q^k|\phi\rangle q^d \\ &= \sum_{d,k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m_d}\langle\Psi_d|(X\otimes f_k(w))|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes\phi\rangle\right)q^{d+k}\end{aligned}$$

で与えられる．上の展開式(4.89)の q に関する展開式の係数をゲージ条件に使っていることに注意する．一方，$\langle\Psi|\in\mathcal{V}_{\lambda^\dagger,0,\lambda}$ に関する通常のゲージ条件によって

$$\langle\Psi_d|(X\otimes f_k(w))|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes\phi\rangle = 0$$

が成立する．したがって，形式的に

$$(4.91)\quad \langle \Psi^{(\lambda)}|X\otimes P(x(q,w),y(q,w)) = \sum_{d,k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m_d}\langle\Psi_d|(X\otimes f_k(w))|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes\phi\rangle\right)q^{d+k}$$

が成立することが分かる．形式的べき級数 $\langle\Psi^{(\lambda)}|$ の収束がまだ分からないので，等式(4.91)から

$$\langle\Psi^{(\lambda)}|\in\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$$

を結論することはできない．そこで，代数幾何学における形式幾何学的な議論を使うことにする．そのために，まず層 $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ の原点における完備化 $\widehat{\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})}_{/0}$ を考える．D での原点 $q=0$ の定義イデアルを $\mathfrak{m}$ と記すと，この完備化は

$$\widehat{\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})}_{/0} = \varprojlim_{n\to\infty} \mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})/\mathfrak{m}^n\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$$

で与えられる．層 $\mathcal{O}_D$ の原点での完備化 $\widehat{\mathcal{O}}_{D/0}$ は $\mathcal{O}_D$ 上忠実平坦であるので

$$\widehat{\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})}_{/0} = \mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})\otimes_{\mathcal{O}_D}\widehat{\mathcal{O}}_{D/0}$$

が成立する．一方，$\widehat{\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})}_{/0}$ は形式的ゲージ条件(4.91)から定義される $\mathcal{H}_0\otimes_{\mathcal{O}_D}\widehat{\mathcal{O}}_{D/0}$ の部分層であることを示すことができる．したがって

$$\langle\Psi^{(\lambda)}| \in \widehat{\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})}_{/0}$$

が成り立つことが分かる．また，$\langle\Psi^{(\lambda)}|$, $\lambda\in P_l$ は $\widehat{\mathcal{O}}_{D/0}$ 上 1 次独立であることが容易に分かる．これは

$$\dim_K \widehat{\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})}_{/0}\otimes K \geqq \dim \mathcal{V}_0^\dagger((\mathcal{E}(0), o(0), u)) \tag{4.92}$$

を意味する．ただし，K は $\widehat{\mathcal{O}}_{D/0}$ の商体を意味する．一方，層 $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ は $D\setminus\{0\}$ 上局所自由である．したがって

$$\operatorname{rank}\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})|D^* = \dim_K \widehat{\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})}_{/0}\otimes K \tag{4.93}$$

が成り立つことが分かる．

さて，層 $\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})$ を考えよう．原点 $q=0$ 上で $\mathbb{C}$，その他の点上では 0 である D 上の層を $\mathbb{C}_0$ と記すと，テンソル積の右完全性から

$$\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})\otimes\mathbb{C}_0 \simeq \mathcal{V}_0((\mathcal{E}(0), o(0), u)) \tag{4.94}$$

が成り立つ．同様の同型は $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})\otimes\mathbb{C}_0$ に対しても成立するが，これは $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ が原点の近傍でも局所自由であることを示してはじめていえることである．この事実が共形ブロックのなす層だけでなく双対共形ブロックのなす層を考える必要があることを示している．さて(4.92), (4.93)および(4.94)から

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})|D^* &= \operatorname{rank}\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})|D^*\\ &\geqq \dim\mathcal{V}_0^\dagger((\mathcal{E}(0), o(0), u)) = \dim\mathcal{V}_0((\mathcal{E}(0), o(0), u))\\ &= \dim\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})\otimes\mathbb{C}_0\end{aligned}$$

が成り立つことが分かる．一方，層 $\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})$ は連接層であるので逆向きの不等式

$$\dim \mathcal{V}_0(\mathfrak{F})\otimes\mathbb{C}_0 \geqq \operatorname{rank}\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})|D^* \tag{4.95}$$

が成立する．したがって(4.95)で等号が成立することが分かる．これは $\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})$ が原点の近傍でも局所自由 $\mathcal{O}_D$ 加群であることを意味する．

以上の論法は一般の種数の場合にも適用することができる．次に，$\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ 上の射影的平坦な接続を具体的に表してみよう．完全列(4.72)を今の場合に書き直すと

$$0 \to \pi_*\Theta_{\mathcal{E}/D}(*o(D)) \xrightarrow{t} \mathcal{L}(\mathfrak{F}) \xrightarrow{\theta} \Theta_D(-\log 0) \to 0 \tag{4.96}$$

となる．層 $\Theta_D(-\log 0)$ は $q\dfrac{d}{dq}$ で生成される自由 $\mathcal{O}_D$ 加群である．

$$\theta\left(u^{-1}\frac{d}{du}\right) = -q\frac{d}{dq}$$

が成り立つことが容易に分かる．$\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ に接続を与えるには，$\Theta_D(-\log 0)$ の $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ への作用を与えればよい．そのためには，我々の考察している場合，上の完全列(4.96)の t による像は $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ に自明に作用することを示せばよい．

(4.76)から $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})|D^*$ の任意の局所切断 $\langle\Psi|$ と $\underline{l}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F})$ および局所切断 $|\phi\rangle\in\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{O}_D$ に対して

$$\{D(\underline{l})|\langle\Psi|\}|\phi\rangle = -\langle\Psi|\{D(\underline{l})\phi\rangle\}+\theta(\underline{l})\langle\Psi|\phi\rangle \tag{4.97}$$

が成立する．また，(4.75)から

$$D(\underline{l})|\phi\rangle = \theta(\underline{l})|\phi\rangle + T[\underline{l}]|\phi\rangle$$

が成り立つ．もし $\underline{l}$ が t の像であれば $\theta(\underline{l})=0$ が成り立つ．したがって，この場合

$$\langle\Psi|T[\underline{l}]|\phi\rangle = 0$$

を示せばよい．すなわち $\underline{l}=l(u)\dfrac{d}{du}$ と記すと

$$\operatorname*{Res}_{u=0}\{l(u)\langle\Psi|T[u]|\phi\rangle du\} = 0 \tag{4.98}$$

を示せばよい．§4.2(f)で示したように $\langle\Psi|T[z]|\phi\rangle dz^2$ は1価有理型である．座標 $w=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,z)$ を使うとこれは $\langle\Psi|T[w]|\phi\rangle(dw/w)^2$ と表示できる．さて，考察している場合は，$o(D)$ に沿ってのみ極をもつ相対ベクトル場 $\tau\in$

$\pi_* \Theta_{\mathcal{E}/D}(*o(D))$ によって

$$\underline{l} = t(\tau)$$

と書けるので，$l(u)\langle\Psi|T[u]|\phi\rangle du$ は

$$i(\tau)(\langle\Psi|T[w]|\phi\rangle(dw/w)^2)$$

と書くことができ，大域的な有理微分型式である．ここで，$i(\tau)$ はベクトル場 τ による内部積である．したがって(4.98)が成立することが分かる．したがって $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{F})$ 上に接続を定義できる．

一般の種数の場合には $\langle\Psi|T[z]|\phi\rangle dz^2$ は大域的な微分型式ではない．したがって，既に上で述べたように，t による像は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}^\dagger(\mathfrak{F})$ 上にある種の正則函数の掛け算として作用する．これが，接続が射影的となる理由である．

さて，最後に形式的べき級数 $\langle\Psi^{(\lambda)}|$ は実際に収束し，$\mathcal{V}_0(\mathfrak{F})$ の元を与えることを証明しよう．そのために

$$\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}| = q^{\Delta_\lambda}\langle\Psi^{(\lambda)}|$$

とおこう．$\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|$ は任意の $|\phi\rangle \in V_0 \otimes \mathcal{O}_D$ に対して微分方程式

$$q\frac{d}{dq}\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|\phi\rangle - \langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|L_{-2}\phi\rangle = 0 \tag{4.99}$$

を満足することを示そう．ここで $V_0 = \mathcal{H}_0(0)$ である．この事実を一般的に示すには面倒な計算が必要になる．ここでは $|\phi\rangle = |0\rangle$ のときに(4.99)を満足することを示すことで満足しよう．この場合は，既に述べたように

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|0\rangle &= \sum_{d=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{m_d}\langle\Psi|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes 0\rangle\right)q^{\Delta_\lambda+d} \\ &= \sum_{d=0}^{\infty}(\dim\mathcal{H}_\lambda(d))q^{\Delta_\lambda+d}\end{aligned}$$

が成立する．そこで，まず $\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|L_{-2}0\rangle$ を計算してみよう．この計算のためには

$$\begin{aligned}&\langle\Psi|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes L_{-2}0\rangle \\ &\quad = \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{g}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\langle\Psi|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes J^a(m)J^a(-2-m)0\rangle\end{aligned}$$

を計算すれば十分である．ゲージ条件を使って右辺を直接計算すると

$$\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|L_{-2}0\rangle = \sum_{d=0}^{\infty}(\varDelta_\lambda + d)\dim\mathcal{H}_\lambda(d)q^{\varDelta_\lambda + d}$$

であることが分かる．この等式の右辺は

$$q\frac{d}{dq}\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|0\rangle$$

に等しい．よって求める結果が得られた．上の議論は $|\phi\rangle\in\mathcal{H}_0\otimes\mathcal{O}_D$ に対しても適用できる．

ところで，物理の文献では $\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|\phi\rangle$ は

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda}(q^{L_0}\langle\Psi|*\otimes*\phi\rangle) \tag{4.100}$$

と記されている．さらに，通常は項 $q^{-\frac{c_v}{24}}$ を付け加えた

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda}(q^{L_0-\frac{c_v}{24}}\langle\Psi|*\otimes*\phi\rangle) \tag{4.101}$$

の形を使う．これは楕円曲線の座標として $\mathbb{C}^*$ の座標 $w=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,u)$ をとったことと関係している．Schwarz 微分 $\{w;u\}=2\pi^2$ であるので定理 4.43 (2)より形式的に

$$T(u)du^2 = T(w)dw^2 + \frac{\pi^2 c_v}{6}du^2 = T(w)dw^2 - \frac{c_v}{24}dw^2$$

と書くことができることに由来している．このとき微分方程式(4.99)は

$$q\frac{d}{dq}\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|\phi\rangle - \langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|L_{-2}\phi\rangle - \frac{c_v}{24}\langle\widetilde{\Psi}^{(\lambda)}|\phi\rangle = 0$$

の形に変わる．表示(4.100)および(4.101)は次のように解釈することができる．元 $|\phi\rangle\in\mathcal{H}_0$ を固定すると

$$\langle\Psi|*\otimes*\phi\rangle:\ u\otimes\longmapsto\langle\Psi|u^\dagger\otimes u\otimes\phi\rangle \tag{4.102}$$

は $\mathcal{H}_\lambda(d)$ の自己準同型写像を定義する．ただし，$u^\dagger$ は補題 4.19 で定義された双線型写像による u の双対元である．すると

$$\sum_{i=1}^{m_d}\langle\Psi|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes\phi\rangle$$

は写像

$$\langle\Psi|*\otimes*\phi\rangle\in\mathrm{Hom}(\mathcal{H}_\lambda(d),\mathcal{H}_\lambda(d))$$

の $\mathcal{H}_\lambda(d)$ 上のトレースとみることができる．さらに L_0 は $\mathcal{H}_\lambda(d)$ 上に $\Delta_\lambda+d$ 倍で作用するので

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda(d)}(q^{L_0}\langle\Psi|*\otimes*\phi\rangle) = q^{\Delta_\lambda+d}\sum_{i=1}^{m_d}\langle\Psi|v^i(d)\otimes v_i(d)\otimes\phi\rangle$$

と考えることができる．したがって(4.100)および(4.101)の $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda}$ は

$$\sum_{d=0}^{\infty}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda(d)}$$

と解釈すればよいことが分かる．

ところで，これは以前に注意すべきことであったが有理写像

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{P}^2\times D \\ [(q,(w:1)] & \longmapsto & ((1:x(q,w):y(q,w)),q)\end{array}$$

は $\mathcal{E}$ の $\mathbb{P}^2\times D$ の複素部分多様体としての埋め込みを与えている．

§4.4　KZ 方程式

この節では種数 $g=0$ の場合の接続を具体的に表示することを考察する．すでに定理 4.60 で述べたように，今の場合接続は平坦である．整数 $N\geqq 3$ に対して

$$B_N = \mathbb{C}^N \setminus \bigcup_{i<j}\Delta_{ij}$$

とおく．ここで

$$\Delta_{ij} = \{(z_1,\cdots,z_N)\in\mathbb{C}^N \mid z_i=z_j\}$$

とおいた．今まで通り $\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と考え，$\mathbb{C}$ の座標を u と記す．

$$\mathcal{B}=B_N,\quad \mathcal{C}=B_N\times\mathbb{P}^1$$

とおき，$\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{B}$ を 1 番目の因子への射影とする．さらに

$$\begin{array}{cccc}s_j\colon & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}\times\mathbb{P}^1 \\ & (z_1,\cdots,z_N) & \longmapsto & (z_1,\cdots,z_N,(z_j:1))\end{array}$$

と定義し，$s_j(\mathcal{B})$ を中心とする形式近傍

$$\eta_j\colon\ \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}/s_j(\mathcal{B})}\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{B}}[[\xi]]$$

を

$$\eta_j^{-1}(\xi)=\xi_j=u-z_j$$

と定義すると $\mathfrak{F}=(\pi\colon\mathcal{C}\to\mathcal{B};s_1,\cdots,s_N;\eta_1,\cdots,\eta_N)$ は形式近傍をもった N 点付 $\mathbb{P}^1$ の族である．形式近傍 s_j は $\mathbb{C}$ の座標 u から一意的に定まるので，族 $\mathfrak{F}$ は種数 0 の N 点付非特異曲線の族と考えることもできる．ところで，$\mathbb{P}^1$ の正則自己同型(1 次分数変換)で任意の相異なる 3 点は $0,1,\infty$ に移すことができるので，種数 0 の N 点付非特異曲線の普遍族のパラメータ空間の次元は $N-3$ である．したがって $\mathfrak{F}$ は完備ではあるが普遍族ではないことに注意する．

さて，族 $\mathfrak{F}$ から定まる共形ブロックのなす $\mathcal{B}=B_N$ 上のベクトル束 $\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ の平坦接続の具体形を求めよう．

$$\zeta_\lambda=u-z_\lambda,\quad \lambda=1,2,\cdots,N,\quad \zeta_\infty=1/u$$

とおき，$\mathcal{C}$ の開被覆 $\{\mathcal{U}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を正数 ε を適当に選び

$$\mathcal{U}_\lambda=\{(z_1,\cdots,z_N;\zeta_\lambda)\mid(z_1,\cdots,z_N)\in B_N,\ |\zeta_\lambda|<\varepsilon\}$$

と定義する．ここで

$$\Lambda=\{1,2,\cdots,N,\infty\}$$

とおいた．このとき次の事実が成り立つ．

定理 4.61　族 $\mathfrak{F}$ の小平–Spencer 写像

$$\rho\colon\ \Theta_{\mathcal{B}}\longrightarrow R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}\left(-\sum_{j=1}^N s_j(\mathcal{B})\right)$$

は

$$\theta=\sum a_j(z)\frac{\partial}{\partial z_j}\longmapsto[\{\rho_{\lambda\mu}\}]$$

で与えられる．ここで $\mathcal{U}_\lambda\cap\mathcal{U}_\mu\neq\varnothing,\ \lambda\neq\mu$ に対して $\rho_{\lambda\mu}$ は

$$\rho_{\lambda\mu} = \begin{cases} (a_\mu(z) - a_\lambda(z)) \dfrac{\partial}{\partial \zeta_\lambda}, & 1 \leqq \lambda, \mu \leqq N \\ -a_\lambda(z) \dfrac{\partial}{\partial \zeta_\lambda}, & \mu = \infty \end{cases}$$

さらに，$\mathrm{Ker}\,\rho$ は大域切断

$$\sum_{j=1}^{N} z_j^k \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad k = 0, 1, 2$$

から生成される階数 3 の $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 自由加群である．□

さて完全列

$$0 \longrightarrow \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(-\sum s_j(\mathcal{B})) \longrightarrow \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \frac{d}{d\xi_j} \longrightarrow 0$$

から完全列

$$0 \longrightarrow \pi_* \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \frac{d}{d\xi_j} \stackrel{\vartheta}{\longrightarrow} R^1 \pi_* \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(-\sum s_j(\mathcal{B})) \longrightarrow 0$$

を得る．$\pi_* \Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$ は階数 3 の $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 自由加群であり，$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の基底として

$$u^k \frac{\partial}{\partial u}, \quad k = 0, 1, 2$$

をとることができることに注意する．$\vec{l} \in \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \dfrac{d}{d\xi_j}$ に対して像 $\vartheta(\vec{l})$ は 1 コサイクル $\{\vartheta_{\lambda\mu}\}$ で与えられる．ここで

$$\vartheta_{\lambda\mu} = \begin{cases} \underline{l}_\mu - \underline{l}_\lambda, & 1 \leqq \lambda, \mu \leqq N \\ -\underline{l}_\lambda, & \mu = \infty \end{cases}$$

である．上の定理から次の補題を導くことができる．

補題 4.62　$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ 加群の同型写像

$$\begin{array}{cccc} \theta: & \bigoplus_{j=1}^{N} \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \dfrac{d}{d\xi_j} & \longrightarrow & \Theta_{\mathcal{B}} \\ & \sum_{j=1}^{N} a_j(z) \dfrac{d}{d\xi_j} & \longmapsto & \sum_{j=1}^{N} a_j(z) \dfrac{\partial}{\partial z_j} \end{array}$$

によって以下の図式は可換になる.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} & \to & \bigoplus_{j=1}^{N}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}\dfrac{d}{d\xi_j} & \xrightarrow{\vartheta} & R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(-\sum s_j(\mathcal{B})) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow\theta & & \| & & \\ 0 & \to & \operatorname{Ker}\rho & \to & \Theta_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\rho} & R^1\pi_*\Theta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}(-\sum s_j(\mathcal{B})) & \to & 0 \end{array}$$

□

そこで $\vec{l}=(\underline{l}_1,\cdots,\underline{l}_N)\in\bigoplus_{j=1}^{N}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}\dfrac{d}{d\xi_j}$ の $\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})=\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{B_N}$ への作用 $D(\vec{l})$ を(4.74)で定める．すると

$$D(\vec{l})(\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F}))\subset\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{F})\mathcal{H}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$$

が成り立つことが容易に分かる．したがって $D(\vec{l})$ は $\mathcal{V}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ へ作用し，この作用の双対として $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に作用する．既に述べたように $\mathbb{P}^1$ では平坦な接続が定義できる．この接続は $\vec{l}\in\bigoplus_{j=1}^{N}\mathcal{O}_{\mathcal{B}}\dfrac{d}{d\xi_j}$，$v\in V_{\vec{\lambda}}$, $\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に対して

$$\{D(\vec{l})(\langle\Psi|)\}|v\rangle=-\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(l_j(\xi_j)\langle\Psi|T(\xi_j)|v\rangle d\xi_j)+\theta(\vec{l})(\langle\Psi|v\rangle)$$

と書ける．定理4.40より $\langle\Psi|\in\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{F})$ に対して $\langle\Psi|D(\vec{l})=0$ であるための必要十分条件はすべての元 $v\in V_{\vec{\lambda}}$ に対して $\{\langle\Psi|D(\vec{l})\}|v\rangle=0$ が成り立つことである．したがって $\langle\Psi|D(\vec{l})=0$ が成り立つための必要十分条件は

$$\theta(\vec{l})\langle\Psi|v\rangle=\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(l_j(\xi_j)\langle\Psi|T(\xi_j)|v\rangle d\xi_j)$$

が成り立つことであることが分かる．等式(4.52)より平坦切断を与える式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_j}\langle\Psi|v\rangle &= \sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}(\langle\Psi|T(\xi_j)|v\rangle d\xi_j)\\ &= \frac{1}{2(g^*+l)}\sum_{j=1}^{N}\operatorname*{Res}_{\xi_j=0}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\langle\Psi|\Omega_{ik}|v\rangle}{(\xi_j+z_j-z_i)(\xi_j+z_j-z_k)}\right)d\xi_j\right)\\ &= \frac{1}{(g^*+l)}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{\langle\Psi|\Omega_{jk}|v\rangle}{z_j-z_k}\end{aligned}$$

と書くことができる．これが求める式である．ここで Ω_{jk} は式(4.51)で定義される．

微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\langle\Psi|v\rangle = \frac{1}{(g^*+l)}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{N}\frac{\langle\Psi|\Omega_{jk}|v\rangle}{z_j-z_k}$$

は **Knizhnik–Zamolodchikov 方程式**，略して **KZ 方程式**と呼ばれる．この方程式については河野[57]および Tsuchiya–Kanie [90]を参照されたい．

§4.5 Verlinde の公式

(a) Verlinde の公式とは

形式近傍をもった種数 g の安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}$ のレベル l，ラベル $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ の共形ブロックの空間 $\mathcal{V}^{\dagger}_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ の次元を $N_g(\vec{\lambda})$ と記す．この次元は種数 g，レベル l とラベル $\vec{\lambda}$ と複素単純 Lie 代数のみによるからこう記してよい．この数についての興味深い性質が，物理学者 E. Verlinde(フェアリンデ)により発見された([95])．以下では $N=1$, $\lambda=0$ の場合を $N=0$ の場合と呼ぶことがある．点付の曲線を考えないと本来は意味のない共形ブロックの定義を本書では採用しているが，点が指定されない場合の共形ブロックの定義は定理 4.37 を使って 1 点付曲線を考えラベルは 0 を指定したものと考えることが可能だからである．さらに，本節では代数幾何学的に考えることが多いので，複素単純 Lie 群の代わりに単純代数群を考える．単純代数群を複素数体上で複素多様体と考えると複素単純 Lie 群となり，すべての複素単純 Lie 群はこのようにして得られることが知られている．代数群あるいはさらに一般に群スキームとして代数幾何学的に考えると体を自由にとって考えることができる利点があることが以下の考察から明らかになる．たとえば $SL_2(\mathbb{C})=SL(2,\mathbb{C})$ は代数群 $G=SL_2$ の $\mathbb{C}$ に値をとる点の全体 $G(\mathbb{C})$，$SL_2(\mathbb{C}((\chi)))$ は $\mathbb{C}((\chi))$ に値をとる点の全体 $G(\mathbb{C}((\chi))$ と考えることができる．このような観点から考えるので以下では代数群として SL_2 や SL_r という表記を用い対応する Lie 代数も $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_r$ と記す．

さて，$g\geqq 1$ のとき

$$N_g^{(l)} = N_g(0) = \dim \mathcal{V}_0(\mathfrak{X})$$

とおく．ここで $\mathfrak{X}=(C;Q;\chi)$ である．上の注意により $\mathcal{V}_0^\dagger(\mathfrak{X})$ をしばしば $\mathcal{V}_\varnothing^\dagger(\mathfrak{X})$ と記す．また種数 0 の場合には

$$N_0^{(l)}=\dim \mathcal{V}_{0,0,0}(\mathbb{P}^1;Q_1,Q_2,Q_3;\chi_1,\chi_2,\chi_3)=1$$

とおく．

$G=SL_2$ のときは

$$N_g^{(l)}=\sum_{j=1}^{l+1}\left(\frac{l+2}{2\sin^2\dfrac{j\pi}{l+2}}\right)^{g-1} \tag{4.103}$$

であることを以下で示す．特に，$N_1^{(l)}=l+1$, $N_g^{(1)}=2^g$, $N_g^{(2)}=2^{g-1}(2^g+1)$, $\cdots$ であることがこれより分かる．この種の公式を **Verlinde の公式**(Verlinde formula)と呼ぶ．

実はこれらの公式の背後には，フュージョン(fusion)代数と呼ばれる有限次元の $\mathbb{Q}$ 代数 $\mathbb{R}_l=\mathbb{R}_l(\mathfrak{sl}_2)$ が存在する．代数 $\mathbb{R}_l$ は種数 0 の 3 点の共形ブロックの次元 $N_{\lambda\mu}^\nu:=N_0((\lambda,\mu,\nu))$ を構造定数とする代数である．その反映として，種数 1 の共形ブロックへの $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ の作用 S により，行列 $N_\lambda=(N_{\lambda\mu}^\nu)_{\mu,\nu}$ が対角化される，という Verlinde の洞察が成り立つ．

Verlinde, Witten らの物理学者は，幾何学的量子化の考えに基づき，空間 $\mathcal{V}_\lambda^\dagger(\mathfrak{X})$ を代数曲線上の(放物(parabolic)構造付きの)G 主束のモジュライ空間上のある豊富な直線束(Picard 群の生成元)の正則な大域切断の空間と同定した．それから，$\mathcal{V}_\lambda$ 上の射影的に平坦な接続の存在も従う．結論として，$N_g^{(l)}$ は G 主束のモジュライ空間上のある直線束の正則な大域切断の空間の次元を与え，組合せ論的に計算できる，という驚くべき帰結を伴った．

より詳しく述べよう．

非特異射影代数曲線 C を固定する．また，C の種数を $g\geqq 2$ とする．G を単連結な複素半単純代数群とする．C 上の G 主束のモジュライ空間を $\mathcal{M}_C^G$ と記そう．$G=SL_r$ の場合は**行列式束**(determinant bundle)が $\bigwedge^r E\simeq\mathcal{O}_C$ である階数 r のベクトル束のモジュライ空間に他ならない．以下では，主に $G=SL_2$ の場合に述べる．

まず $\mathcal{M}_C^G$ の Picard 群について次の結果が知られている.

定理 4.63 (Drezet–Narasimhan) $G=SL_r$ とする. $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_C^G)\simeq\mathbb{Z}\cdot\mathbb{L}$ である. □

$r=2$ の場合は Beauville による. 生成元 $\mathbb{L}$ は Cartier 因子

$$\Theta_L := \{E\in\mathcal{M}_C^G \mid h^0(C,E\otimes L)\geqq 1\}$$

に対応する可逆層 $\mathcal{O}(\Theta_L)$ である. ただし, L は C 上の次数 $g-1$ の可逆層であり, $\mathcal{O}(\Theta_L)$ は L のとり方によらないことが分かる. また, $\mathbb{L}^{-1}$ は $\Lambda^{\max}H^0(C,E)\otimes(\Lambda^{\max}H^1(C,E))^{-1}$ をファイバーとする行列式束と一致することが知られている. 一般の G でも $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_C^G)$ には同様の生成元が存在する.

さて以上の準備のもとで Verlinde の公式の主張をまとめると, 次の通りである.

定理 4.64 (Verlinde の公式) $l\geqq 1$ に対し,

$$\dim H^0(\mathcal{M}_C^G,\mathbb{L}^{\otimes l}) = \dim \mathcal{V}_\varnothing^\dagger(\mathfrak{X})(2(l+2))^{g-1}\sum_{j=1}^{l+1}\left(\frac{1}{2\sin\dfrac{j\pi}{l+2}}\right)^{2g-2}$$

ただし, $\mathcal{V}_\varnothing^\dagger(\mathfrak{X})$ は 0 点の共形ブロックの空間である. □

Verlinde の公式の数学的証明は 2 通りある. 一つは, 一般の半単純代数群 G に対して成り立つ証明で, モジュライ空間 $\mathcal{M}_C^G$ をモジュライスタック M_C^G で置き換えて, ループ群 $G(\mathbb{C}((z)))$ による M_C^G の一意化を通じて $\mathcal{V}_\varnothing^\dagger(\mathfrak{X})$ との同型を得るアプローチである. $G=SL_r$ の場合は Beauville–Laszlo [8] により, 一般の G では Laszlo–Sorger [61] により証明が与えられた. Faltings [28] もそれより早く, やはりループ群を用いて Verlinde 同型と分解定理(定理 4.44)が成り立つことを主張している.

もう一つの証明は幾何学的なアプローチによるもので, Euler–Poincaré 標数 $\chi(\mathcal{M}_C^G,\mathbb{L}^{\otimes l})$ を計算するもの(Bertram–Szenes), $\mathcal{M}_C^G$ をフリップ(flip)により別の空間に置き換えて計算するもの(Thaddeus), $\mathcal{M}_C^G$ のコホモロジー環のもつ性質を使い純粋に計算的な方法で $\chi(\mathcal{M}_C^G,\mathbb{L}^{\otimes l})$ を求めるもの(Zagier)等ある. ただし, このアプローチでは主に $G=SL_2$ の場合しか完成していない.

これから，Verlinde の公式に対する第1のアプローチを $G=SL_2$ の場合にみてみる．示すべきことは二つの部分に分かれる．Lie 代数論的な組合せ的問題(定理の二つ目の等式)と，共形ブロックの空間を同定する同型

$$H^0(\mathcal{M}_C^G, \mathbb{L}^{\otimes l}) \simeq \mathcal{V}_{\varnothing}^{\dagger}(\mathfrak{X})$$

の証明である．この同型のことを Verlinde 同型と呼んでおこう．

(b)　フュージョン環と指標

まず，組合せ的問題の方を述べる．自然数 l に対し，$\Lambda=\left\{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}\,|\,0\leqq j\leqq\frac{l}{2}\right\}$ とおく．Λ は $G=SL_2$ の場合のレベル l の支配的整ウェイトの集合 P_l (4.10)と同一視する．N 点の共形ブロックの空間の次元 $N_g(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ ($\lambda_i\in\Lambda$) は，λ_i の置換について不変だから，Λ で生成される自由可換モノイド $F_+(\Lambda)$ から $\mathbb{Z}$ への写像と思うことができる．

$$\begin{array}{rccc} N_g: & F_+(\Lambda)\simeq\mathbb{Z}_{\geqq 0}^{l+1} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & \lambda_1+\cdots+\lambda_N & \longmapsto & N_g(\lambda_1,\cdots,\lambda_N) \end{array}$$

すなわち，$N_g(\lambda_1+\cdots+\lambda_N)=N_g(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$ である．また，$0\in\Lambda$ と $F_+(\Lambda)$ の 0 を区別するために $\lambda_0=0\in\Lambda$ と書こう．

分解定理(定理 4.44)から $\nu\in F_+(\Lambda)$ に対して

$$N_g(\nu) = \sum_{\mu\in\Lambda} N_{g-1}(\nu+\mu+\mu^{\dagger})$$

が成り立つことが分かる．μ に対する表現の反傾(contragradient)表現に対応するウェイトが $\mu^{\dagger}$ である．SL_2 の場合は $\mu^{\dagger}=\mu$ であるが，意味をはっきりさせるため，区別して記す．この等式より次を得る．

$$N_g(\lambda_1+\cdots+\lambda_N) = \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_g\in\Lambda} N_0\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i+\sum_{j=1}^{g}(\mu_j+\mu_j^{\dagger})\right)$$

種数 0 の場合の N_0 の性質をもう少しみよう．

命題 4.65

(1)　$N_0(\lambda)=\delta_{\lambda,\lambda_0}$，$N_0(0)=1$．

（2）　$N_0(\pi+\rho)=\sum_{\mu\in\Lambda} N_0(\pi+\mu)N_0(\rho+\mu^\dagger)$ $(\pi,\rho\in F_+(\Lambda))$.

（3）（非退化性）　任意の $\nu\in F_+(\Lambda)$ に対して $N_0(\nu+\lambda)=0$ なる $\lambda\in F_+(\Lambda)$ は存在しない.

［証明］　$N_0(0)=\dim\mathcal{V}_\varnothing^\dagger(\mathbb{P}^1)=1$ である．同じく，$N_0(\lambda_0)=N_0(\lambda_0,\lambda_0,\lambda_0)=1$ である．また，$1=N_0(0)=\sum_{\mu\in\Lambda} N_0(\mu)N_0(\mu^\dagger)=\sum_{\mu\in\Lambda} N_0(\mu)^2$ ゆえ，(1)を得る．

(2)は分解定理そのものである．

$N_0(\lambda+\lambda^\dagger)=\dim\mathcal{V}^\dagger_{\lambda,\lambda^\dagger}(\mathbb{P}^1;0,1)=1$ を知っているので，(3)は成り立つ．∎

注意 4.66　一般に $N_g(\lambda^\dagger)=N_g(\lambda)$ である．

一般に(1)を弱めた

条件(1′)　$N_0(0)=1$ かつ $N_0(\lambda)>0$ となるラベル $\lambda\in\Lambda$ が存在する

および(2)を満たす写像 $N_0\colon F_+(\Lambda)\to\mathbb{Z}$ を**フュージョン律**(fusion rule)と呼ぶことがある．さらにフュージョン律が(3)を満たすとき，**非退化**であるという．

Λ で生成される自由 Abel 群を $F(\Lambda)=\mathbb{Z}^{l+1}$ と記す．自然に $F_+(\Lambda)\subset F(\Lambda)$ とみなすことができる．

さて，$F(\Lambda)$ に積を定義しよう．$\lambda,\mu,\nu\in\Lambda$ に対して，$N^\nu_{\lambda\mu}:=N_0(\lambda+\mu+\nu^\dagger)$ $(=N_0(\lambda,\mu,\nu^\dagger))$ とおく．$F(\Lambda)$ の基底の間の積を

$$\lambda\cdot\mu=\sum_{\nu\in\Lambda} N^\nu_{\lambda\mu}\nu$$

で定め，$F(\Lambda)$ 全体に $\mathbb{Z}$ 線型に拡張する．

定理 4.67　上の積は可換で結合的である．したがって，この積で $F(\Lambda)$ は可換環の構造をもつ．このとき，λ_0 が単位元である．

［証明］　$N^\nu_{\lambda\mu}=N^\nu_{\mu\lambda}$ ゆえ，これが可換な積であることは明らか．

結合則は

$$\sum_{\rho,\sigma} N^\rho_{\lambda\mu}N^\sigma_{\rho\nu}=\sum_{\rho,\sigma} N^\sigma_{\lambda\rho}N^\rho_{\mu\nu}\quad(\forall\lambda,\mu,\nu)$$

に他ならない．左辺は N_0 の性質(2)を用いて，

$$\sum_{\rho,\sigma} N_0(\lambda+\mu+\rho^\dagger)N_0(\rho+\nu+\sigma^\dagger) = \sum_{\sigma} N_0(\lambda+\mu+\nu+\sigma^\dagger)$$

となる．同様に，右辺も

$$\sum_{\rho,\sigma} N_0(\lambda+\rho+\sigma^\dagger)N_0(\mu+\nu+\rho^\dagger) = \sum_{\sigma} N_0(\lambda+\mu+\nu+\sigma^\dagger)$$

となり，左辺に一致する．

λ_0 が単位元であることは，$N^{\nu}_{\lambda_0\mu}=\delta_{\mu,\nu}$ と同値だが，確かに $N_0(\lambda_0+\mu+\nu^\dagger)=N_0(\mu+\nu^\dagger)=\delta_{\mu,\nu}$ が成り立つ．∎

この積をもつ環 $F(\Lambda)$ をフュージョン律 N_0 に付随するフュージョン環(または代数)という．この積について，$\lambda_i\in\Lambda$ $(1\leqq i\leqq N)$ に対して

$$\lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_N = \sum_{\mu\in\Lambda} N_0(\lambda_1+\cdots+\lambda_N+\mu^\dagger)\mu$$

であることが容易に確かめられる．

$F(\Lambda)$ 上の線型汎函数 $t\colon F(\Lambda)\to\mathbb{Z}$ を $t(\lambda)=\delta_{\lambda,\lambda_0}$ $(\lambda\in\Lambda)$ で定めよう．すると上の積の式から，

$$t(\lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_N) = N_0(\lambda_1+\cdots+\lambda_N)$$

が成り立つ．特に，$t(\lambda\mu)=\delta_{\lambda,\mu^\dagger}$ $(\lambda,\mu\in\Lambda)$ が成り立つので，次の命題の最初の主張は明らかである．

命題 4.68　双線型型式 $(\alpha,\beta)\mapsto t(\alpha\beta)$ $(\alpha,\beta\in F(\Lambda))$ により同型 $F(\Lambda)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(\Lambda),\mathbb{Z})$ を得る．$\alpha\in F(\Lambda)$ に対し，α 倍写像 $m_\alpha\in\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(F(\Lambda))$ のトレースを $\mathrm{Tr}(\alpha):=\mathrm{Tr}(m_\alpha)\alpha=\lambda\in\Lambda$ に対して

$$\mathrm{Tr}(m_\lambda) = t(\lambda\cdot\mathrm{Cas})$$

が成り立つ．ここで，$\mathrm{Cas}:=\sum_{\mu\in\Lambda}\mu\cdot\mu^\dagger$ とおいた．

[証明]

$$\mathrm{Tr}(m_\lambda) = \sum_{\mu\in\Lambda} N^{\mu}_{\lambda\mu} = \sum_{\mu\in\Lambda} N_0(\lambda+\mu+\mu^\dagger) = \sum_{\mu\in\Lambda} t(\lambda\cdot\mu\cdot\mu^\dagger) = t(\lambda\cdot\mathrm{Cas}).$$

∎

$\mathrm{Cas}\in F(\Lambda)$ の意味だが，$F(\Lambda)$ の後述する Lie 代数論的記述の下で Casimir 元と一致することを示す．

種数 $g\,(\geqq 1)$ での N_g に関しては，分解定理から

$$N_g(\lambda_1+\cdots+\lambda_N)=\sum_{\mu_1,\cdots,\mu_g\in\Lambda}N_0\left(\lambda_1+\cdots+\lambda_N+\sum_{j=1}^{g}(\mu_j+\mu_j^{\dagger})\right)$$
$$=t(\lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_N\cdot\mathrm{Cas}^g)=\mathrm{Tr}(\lambda_1\cdot\cdots\cdot\lambda_N\cdot\mathrm{Cas}^{g-1})$$

となる．

命題 4.69　環 $F(\Lambda)$ はべき零元をもたない．特に，$F(\Lambda)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は有限次代数体の直積に同型である．

［証明］　involution $x\mapsto x^*$ を $x=\sum_i\lambda_i$ に対し，$x^*=\sum_i\lambda_i^{\dagger}$ と定める．$x\in F(\Lambda)$ が $x^2=0$ を満たせば $t(x^2(x^*)^2)=t((xx^*)(xx^*)^*)=0$ である．$t(\alpha\beta)$ の非退化性により，$xx^*=0$. よって $t(xx^*)=0$ となり，$x=0$ を得る．

$x\in F(\Lambda)$ が $x^k=0$ $(k\geqq 3)$ なら，上の議論から $h=\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$ として $x^h=0$ を得るから，帰納法で $x=0$ を得る．後半は，有限次元の $\mathbb{Q}$ 代数の一般論より従う． ∎

この命題は $G=SL_2$ 以外の場合でも成り立つ．

さて，$\mathcal{S}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(F(\Lambda),\mathbb{C})$ とおく．$\mathcal{S}$ は $|\Lambda|$ 個の元からなる有限集合で，集合として $\mathcal{S}=\mathrm{Spec}(F(\Lambda)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C})$ である．

系 4.70　$\alpha\mapsto(\chi(\alpha))_{\chi\in\mathcal{S}}$ は $\mathbb{C}$ 代数の同型 $F(\Lambda)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}^{\mathcal{S}}$ を与える． □

注意 4.71　一般の G の場合，$\chi(\alpha^{\dagger})=\overline{\chi(\alpha)}$ $(\alpha\in F(\Lambda),\ \chi\in\mathcal{S})$ が成り立つ．

この系の同型対応の下に，λ 倍写像 m_λ は $\mathbb{C}^{\mathcal{S}}$ では，$(\chi(\lambda))_{\chi\in\mathcal{S}}$ を対角成分に並べた対角行列 D_λ に対応する．したがって，次の命題が成り立つ．

命題 4.72

$$N_g(\lambda_1+\cdots+\lambda_N)=\sum_{\chi\in\mathcal{S}}\chi(\lambda_1)\cdots\chi(\lambda_N)\chi(\mathrm{Cas})^{g-1}$$

が成り立つ．行列 $N_\lambda=(N_{\lambda\mu}^{\nu})_{(\mu,\nu)\in\Lambda\times\Lambda}$ と $\widetilde{S}=(\chi(\mu))_{(\chi,\mu)\in\mathcal{S}\times\Lambda}$ との間に次の関係が成り立つ．

$$N_\lambda=\widetilde{S}^{-1}D_\lambda\widetilde{S}$$ □

注意 4.73　Verlinde は $N_g(\lambda_1+\cdots+\lambda_N)$ の計算において，線型写像 m_{λ_i} を対角

化しようとして，種数1の共形ブロックへの元 $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ の作用が m_{λ_i} を同時対角化することを見出した．ここで，$F(\Lambda)\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{V}^\dagger_\varnothing(\mathfrak{X})$ であることに注意しよう．ここの記号では $S=D_{\text{Cas}}^{-1/2}\widetilde{S}$ であり，S はユニタリ行列であることが分かる．

この命題により，$N_g(\alpha)$ $(\alpha\in F(\Lambda))$ の計算は，$F(\Lambda)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$（のスペクトル）の具体的情報に帰着される．次に，その記述に取り掛かろう．

基本的な考え方は，フュージョン環 $F(\Lambda)$ を $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の有限次元表現のテンソル積に関する Grothendieck 環 $R(\mathfrak{g})$ の商環として表示することである．

Grothendieck 環 $R(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の有限次元表現 V の同型類 $[V]$ で生成され，

$$[V]+[W]=[V\oplus W],\quad [V]\cdot[W]=[V\otimes W]$$

なる加法と乗法により可換で結合的な環となる．$\mathbb{Z}$ 加群としては，支配的整ウェイトの集合 P_+ で自由生成される加群である．問題はこの積とフュージョン律との関係である．

ところで，アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ のレベル l の可積分表現に対応する最高ウェイトの集合は，自然に有限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ のウェイトとみなせる．$\lambda\in\Lambda$ に対しては，$\mathfrak{g}$ の既約表現 V_λ が対応する．この意味で集合としては自然な単射 $\kappa\colon F(\Lambda)\hookrightarrow R(\mathfrak{g})\colon \lambda\mapsto[V_\lambda]$ が存在する．

環 $F(\Lambda)$ の構造定数 $N_{\lambda\mu}^{\nu}$ は，共形ブロックの空間 $\mathcal{V}_{\lambda,\mu,\nu^\dagger}(\mathbb{P}^1)$ の次元であったが，この空間は次のように表示することができる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\lambda,\mu,\nu^*}(\mathbb{P}^1) &= \{\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda\otimes V_\mu\otimes V_{\nu^\dagger},\mathbb{C})\mid \\
&\qquad\qquad \psi|V_\lambda^{(j_1)}\otimes V_\mu^{(j_2)}\otimes V_{\nu^\dagger}^{(j_3)}=0\ (\forall j_1+j_2+j_3>l)\} \\
&= \{\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda\otimes V_\mu, V_\nu)\mid \\
&\qquad\qquad \psi(V_\lambda^{(j_1)}\otimes V_\mu^{(j_2)})\subset\sum_{j_1+j_2+j_3\leqq l}V_\nu^{(j_3)}\}
\end{aligned}$$

ここで，自然に $V_\lambda\subset\mathcal{H}_\lambda$ であることに注意する．$V_\lambda^{(j)}$ は V_λ のスピン $j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ のウェイト空間を表す．また，同一視 $\mathrm{Hom}(V_\lambda\otimes V_\mu\otimes V_{\nu^\dagger},\mathbb{C})\simeq\mathrm{Hom}(V_\lambda\otimes V_\mu, V_\nu)$ を使った．

テンソル積 $V_\lambda\otimes V_\mu$ における V_ν の重複度は $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_\lambda\otimes V_\mu, V_\nu)$ で与え

られ，**Clebsch–Gordon 係数**と呼ばれている．$F(\Lambda)$ における積はこの既約分解をさらに制限したものになっている．特に，$\kappa(\lambda\cdot\mu)\neq\kappa(\lambda)\kappa(\mu)$ である．$\kappa(\lambda\cdot\mu)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の表現は

$$V_\lambda \overset{\bullet}{\otimes} V_\mu := V_\lambda \otimes V_\mu / W_{\lambda,\mu}$$

で与えられる．ここで，$j_1+j_2+j_3>l$ を満たす $V_\lambda^{(j_1)}\otimes V_\mu^{(j_2)}$ のスピン j_3 成分で生成される $V_\lambda\otimes V_\mu$ の部分表現を $W_{\lambda,\mu}$ と記した．

複素単純 Lie 群の有限次元表現の同型類は，その指標によって一意的に決まることが知られている．指標を導入するために $G=SL_2$ の極大トーラス $T=\left\{\left(\begin{array}{cc} w & 0 \\ 0 & w^{-1}\end{array}\right) \middle| \, w\in\mathbb{C}^*\right\}$ を固定する．ウェイト λ に対して，極大トーラス T 上の函数 e^λ を

$$e^\lambda(\exp h) := e^{\lambda(h)}$$

で定める．ここで，$h\in\mathfrak{H}=\mathbb{C}H=\mathbb{C}\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{array}\right)$ は $\mathfrak{sl}_2$ の Cartan 部分環の元で，$h=u\cdot H$ $(u\in\mathbb{C})$ のとき $e^\lambda(\exp u\cdot H)=e^{u\lambda(H)}$ である．たとえば，α のとき $e^\alpha(\exp 2\pi\sqrt{-1}\,H)=e^{2\pi i\alpha(H)}=e^{2\pi\sqrt{-1}}=1$ である．

準同型 $\chi\colon T\to\mathbb{C}^*$ の全体 $P=\mathrm{Hom}(T,\mathbb{C}^*)$ を考えよう．これはウェイトのなす $\mathfrak{h}^*$ の格子と一致する．表現 V の指標 $\mathrm{Tr}_V(t)$ は

$$\mathrm{Tr}_V(t) := \sum_{\mu\in P}\dim V(\mu)e^\mu(t)$$

と定義される．ここで

$$V=\bigoplus_{\mu\in P}V(\mu),\quad V(\mu)=\{v\in V \mid \text{任意の}\, t\in T\, \text{に対して}\, t\cdot v=\mu(t)v\}$$

は表現のウェイト分解である．最高ウェイト λ をもつ表現 V_λ に対して，Weyl の指標公式が指標の具体的な表示を与える：

$$\mathrm{Tr}_{V_\lambda}(t)=\frac{J(e^{\lambda+\rho})(t)}{J(e^\rho)(t)}=\frac{\sin\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\alpha\right)(t)}{\sin\left(\dfrac{1}{2}\alpha\right)(t)}$$

ただし，$t\in T^{\mathrm{reg}}:=\{t\in T \mid e^\alpha(t)\neq 1\}$ である．真ん中の項は一般の複素単純 Lie 群 G に対する表示であり，

$$J(e^{\mu}) := \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\mu}$$

は Weyl 群 W に関する e^{μ} の反対称化で，ρ は正ルートの和の $\frac{1}{2}$ 倍であり，$J(e^{\rho})$ は分母公式

$$J(e^{\rho}) = e^{\rho} \prod_{\alpha > 0} (1 - e^{-\alpha})$$

で与えられる．$G = SL_2$ の場合は $J(e^{\mu}) = e^{\mu} - e^{-\mu}$, $\rho = \frac{1}{2}\alpha$ となる．

$t \in T$ に対し，$\mathrm{Tr}_*(t) \colon [V] \mapsto \mathrm{Tr}_V(t)$ は $R(\mathfrak{g})$ のスペクトル $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ring}}(R(\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ の元を与える．一方，我々は $F(\Lambda)$ に対するスペクトル $\mathcal{S} = \mathrm{Hom}(F(\Lambda), \mathbb{C})$ を求めたいわけである．

$\mathrm{Tr}_V(t)$ は T 上の有理函数を与えるので，群環 $\mathbb{Z}[P]$ を通じて $R(\mathfrak{g})$ と $F(\Lambda)$ の関係を与えよう．

命題 4.74　$[V_{\lambda}] \mapsto e^{\lambda+\rho}$ は自然な全単射

$$R(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{Z}[P]/I, \quad F(\Lambda) \simeq \mathbb{Z}[P]/I(\Lambda)$$

を導く．ここで，I は $e^{\alpha} + e^{-\alpha}$ で生成されるイデアル，$I(\Lambda)$ は $e^{\alpha} + e^{-\alpha}$, $e^{(l+3)\alpha} - e^{\alpha}$ で生成されるイデアルである．　□

証明は略す．一般の G では Weyl 群に関する鏡映に関する群環の適当な元で生成されるイデアルを考えるとこの命題は成り立つ．

$I \subset I(\Lambda)$ ゆえ，自然な全射 $p \colon \mathbb{Z}[P]/I \to \mathbb{Z}[P]/I(\Lambda)$ は Abel 群の全射

$$\pi \colon \; R(\mathfrak{g}) \longrightarrow F(\Lambda)$$

を導く．これに関する基本的な事実は次の Faltings の定理である．

定理 4.75 (Faltings の定理)　写像 π は環の準同型である．　□

この定理により，$R(\mathfrak{g})$ のスペクトルの元 $\mathrm{Tr}_*(t)$ $(t \in T^{\mathrm{reg}})$ が $F(\Lambda)$ のスペクトルの元とみなせるための条件が次で与えられる．

命題 4.76　元 $t \in T^{\mathrm{reg}}$ が $T_l := \{t \in T \mid e^{(l+2)\alpha}(t) = 1\}$ に属すとき，$\mathrm{Tr}_*(t)$ は π を経由する．さらに，すべての環準同型 $F(\Lambda) \to \mathbb{C}$ は $\mathrm{Tr}_*(t)$, $t \in T^{\mathrm{reg}}/W$ の形で与えられる．

［証明］　$\mathrm{Ker}\,\pi \simeq \mathrm{Ker}\,p$ は $e^{\mu+\beta} - e^{\mu}$, $\mu \in P$, $\beta \in (l+2)Q$ の形の元で生成される．$t \in T_l^{\mathrm{reg}} := T^{\mathrm{reg}} \cap T_l$ とすると，$e^{\beta}(t) = 1$ だから，$(e^{\mu+\beta} - e^{\mu})(t) = 0$ ゆえ

$\mathrm{Tr}_*(t)$ は，$F(\Lambda)\to\mathbb{C}$ を導く．これが環準同型であることを確かめるには，$\mathbb{Z}$ 線型な写像が環の全射準同型であるから(Faltings の定理)，$\mathrm{Tr}_*(t)\colon R(\mathfrak{g})\to\mathbb{C}$ が環準同型であることに帰着する． ∎

$G=SL_2$ の場合には $T\simeq\mathbb{C}^*$ の下で

$$\begin{aligned}
T_l &\simeq \{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{n}{2(l+2)}} \mid 0\leqq n<2(l+2),\ n\in\mathbb{Z}\}\subset\mathbb{C}^*\\
T_l^{\mathrm{reg}} &\simeq \{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{n}{2(l+2)}} \mid 0<n<2(l+2)\text{ または }n\neq l+2\}\\
\Lambda &\simeq \{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{n+1}{2(l+2)}} \mid 0\leqq n\leqq l\}\\
j &\longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{2j+1}{2(l+2)}}
\end{aligned}$$

である．

SL_2 の Weyl 群 $W\simeq S_2=\{1,\iota\}$ がウェイトの集合 P に $\iota(\mu)=-\mu$ で作用するから，

$$P/(l+2)Q\simeq T_l,\quad \Lambda\simeq T_l^{\mathrm{reg}}$$

と表すことができる．また

$$|T_l|=|P/Q|\cdot|Q/(l+2)Q|=2(l+2)$$

が得られる．

一般の G でも，$\lambda \bmod (l+2)Q\mapsto\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\dfrac{\lambda}{l+2}\right)$ は同型 $P/(l+2)Q\simeq T_l$ を与える．同様に，$\lambda\mapsto\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\dfrac{\lambda}{l+2}\right)$ は同型 $\Lambda\simeq T_l^{\mathrm{reg}}$ を与える．また，Faltings の定理と上の命題は古典群と G_2 型の場合に成り立つ．

この命題により，フュージョン環 $F(\Lambda)$ のスペクトルが分かったので，元 $\mathrm{Cas}\in F(\Lambda)$ (Casimir 元)の値の次の表示により具体的な Verlinde の公式を導くことができる．

命題 4.77　$\mu=\dfrac{n}{2}\alpha,\ 0\leqq n\leqq l$ に対して $t=t_\mu=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\dfrac{\mu+\rho}{l+2}\right)$ とおき，さらに $\Delta(t):=|J(e^\rho)(t)|^2,\ \rho=\dfrac{1}{2}\alpha$ とおくと

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}|\mathrm{Tr}_{V_\lambda}(t)|^2=\frac{|T_l|}{\Delta(t)}=\frac{2(l+2)}{\left(2\sin\dfrac{n+1}{l+2}\pi\right)^2}$$

が成立する.

［証明］ 略証を与える.

$$J(e^{\lambda+\rho})(t_\mu) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{(\lambda+\rho)(\mu+\rho)}{l+2}\right) - \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{-(\lambda+\rho)(\mu+\rho)}{l+2}\right) = J(e^{\mu+\rho})(t_\lambda)$$

に注意すると

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |\operatorname{Tr}_{V_\lambda}(t_\mu)|^2 = \frac{1}{\Delta(t_\mu)} \sum_{\lambda\in\Lambda} |J(e^{\mu+\rho})(t_\lambda)|^2$$

を得る. 有限群 T_l に対する指標の直交関係式を使い

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |J(e^{\mu+\rho})|^2 = |T_l| = 2(l+2)$$

が得られる. ∎

以上をまとめると

定理 4.78 $\lambda_k = \dfrac{n_k}{2}\alpha\ (k=1,\cdots,N)$ とおくとき,

$$\begin{aligned}
&N_g(\lambda_1+\cdots+\lambda_N)\\
&= |T_l|^{g-1} \sum_{t\in T_l^{\mathrm{reg}}} \frac{\operatorname{Tr}_{V_{\vec{\lambda}}}(t)}{\Delta(t)^{g-1}}\\
&= (2(l+2))^{g-1} \sum_{j=1}^{l+1} \operatorname{Tr}_{V_{\vec{\lambda}}}\left(\exp 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{j\alpha}{2(l+2)}\right)\left(2\sin\frac{j\pi}{l+2}\right)^{2-2g}\\
&= \left(\frac{l+2}{2}\right)^{g-1} \sum_{j=1}^{l+1} \frac{\prod_{k=1}^{N} \sin\dfrac{(n_k+1)j\pi}{l+2}}{\left(\sin\dfrac{j\pi}{l+2}\right)^{2g-2+N}}
\end{aligned}$$

特に $N=0$ のときには, 冒頭に挙げた式(4.103)を得る. □

(c) Verlinde 同型

次に Verlinde の公式のもう一つの部分である Verlinde 同型

$$H^0(\mathcal{M}_C^G, \mathbb{L}^{\otimes l}) \simeq \mathcal{V}_\varnothing^\dagger(\mathfrak{X})$$

の証明のあらすじについて述べる*1.

証明の基本的な考え方は次の三つのステップに分けられる.

(1)　主束のモジュライ・スタック M_C^G をループ群 $G(K)=G(\mathbb{C}((z)))$ の両側剰余空間 $G(A_S)\backslash G(K)/G(\mathcal{O})$ として表示する.

(2)　アフィン Grassmann 多様体 $\mathcal{Q}=G(K)/G(\mathcal{O})$ に対する Kumar–Mathieu の Borel–Weil–Bott 型の定理 $H^0(\mathcal{Q}, \mathbb{L}_\chi^{\otimes l}) \simeq \mathcal{H}_0^\dagger$ を用いて，$\mathcal{H}_0^\dagger \otimes \bigotimes_{j=1}^N V_{\lambda_j}^*$ の $\widehat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{X})$ 不変部分(すなわち $\mathcal{V}_\varnothing^\dagger(\mathfrak{X})$)と $H^0(M_C^G, \mathbb{L}^{\otimes l})$ の同一視を与える.

(3)　モジュライ空間 $\mathcal{M}_C^G$ とモジュライ・スタック M_C^G の比較(Hartogs 型の議論).

モジュライ空間とモジュライ・スタック(ステップ(1)と(3))

$\mathfrak{X}=(C; Q_1, \cdots, Q_N; \xi_1, \cdots, \xi_N)$ が与えられたとしよう. $D=\{Q_1, \cdots, Q_N\}$ とおく. さらに，代数曲線 C の 1 点 $Q_0 \in C \setminus D$ を固定する.

主 SL_2 束，すなわち，階数 2 のベクトル束で行列式束が自明なもの，のモジュライ空間 $\mathcal{M}_C^G$ $(G=SL_2)$ とは，半安定ベクトル束の S 同値類の集合に代数多様体の構造を入れたものであった. その構成は幾何学的不変式論に基づくデリケートなものである.

一方，C 上のベクトル束 E とそのモジュライにはもっと直観的な考え方がある. B を点 Q_0 を含む小さな開円板とすると，E は $E|B$, $E|C\setminus\{Q_0\}$ および $B\setminus\{Q_0\}$ 上での両者の同一視のデータで完全に記述される. 実は $E|C\setminus\{Q_0\}$ は代数的に自明なベクトル束である. また，B は可縮なので $E|B$ は自明である. しかし代数的な記述には円板は向かないので，$B=\operatorname{Spec}\mathcal{O}$, $\mathcal{O}=\widehat{\mathcal{O}}_{C,Q_0}$ ととり代用する. すると，K を $\mathcal{O}$ の商体として，$B\setminus\{Q_0\}$ は $\operatorname{Spec} K$ に他ならない. また，$B\setminus\{Q_0\}$ 上での同一視は $E_{Q_0} \otimes_{\mathcal{O}_{C,Q_0}} K$ の自己同型，すなわち $SL_2(K)$ の元で与えられる. Q_0 での(形式的な)座

*1　証明の詳細については[28], [8], [61]等の原論文を参照していただくしかない.

標，すなわち同型 $\mathcal{O}\simeq\mathbb{C}[[z]]$ を固定すれば，$SL_2(K)=SL_2(\mathbb{C}((z)))$ と書くことができる．

以上をまとめると次の命題となる．

命題 4.79　C 上の階数 2 のベクトル束 E で $\Lambda^2E\simeq\mathcal{O}$ なるものに対し同型 $\rho\colon E|C\setminus\{Q_0\}\simeq\mathcal{O}|C\setminus\{Q_0\}$ および同型 $\sigma\colon\widehat{E_{Q_0}}\simeq\mathcal{O}$ が決まるが，対応 $E\mapsto(E,\rho,\sigma)$ は次の(集合としての)同型を導く．

$$\{C\text{ 上の階数 2 のベクトル束の同型類}\}\simeq SL_2(A_C)\backslash SL_2(K)/SL_2(\mathcal{O})$$

ただし，$A_C:=H^0(C\setminus\{Q_0\},\mathcal{O}_C)$ とおいた．　□

ρ および σ をとり替える自由度がそれぞれ $SL_2(K)$ および $SL_2(\mathcal{O})$ の元に対応する．次の図式

$$\begin{array}{rcl}\{(E,\rho,\sigma)\} & \simeq & SL_2(K)\\ & & \downarrow\\ \{(E,\rho)\} & \simeq & \mathcal{Q}:=SL_2(K)/SL_2(\mathcal{O})\\ & & \downarrow\\ \{E\} & \simeq & M_C:=SL_2(A_C)\backslash SL_2(K)/SL_2(\mathcal{O})\end{array}$$

の意味を考えてみよう．

$SL_2(\mathcal{O})=SL_2(\mathbb{C}[[z]])$ は $SL_2(\mathbb{C}[z]/(z^k))$ の射影極限として表示できて，無限次元だがスキームの構造をもつ．$SL_2(K)=SL_2(\mathbb{C}((z)))$ もスキームの帰納極限として表示しうる[*2]ので，スキームではないが，自然な(ind-scheme と呼ばれる)代数構造をもつ．

実は，$\mathcal{Q}$ および M_C^G も自然な代数構造をもつことが示せる．M_C^G のもつ構造は Artin の意味の**代数的スタック**(algebraic stack)と呼ばれるものである．($\mathcal{Q}$ は ind-scheme である．)

スタックの定義，性質等を述べるにはスキームの圏論的考察が必要となるので，ここでは省略せざるを得ない．ここではスキーム R(および ind-scheme)のアフィン群スキーム Γ の右作用による商 $\Gamma\backslash R$ はスタックとして存在する

＊2　$S^{(N)}$ を $M\in SL_2(\mathbb{C}((z)))$ で M および M^{-1} が高々 N 位の極をもつものの全体とするとき $SL_2(\mathbb{C}((z)))=\varinjlim S^{(N)}$ である．

ことだけを注意しておこう．また，$\Gamma\backslash R$ 上の可逆層 $\mathcal{L}$ に対して，自然な射影 $\pi\colon R\to\Gamma\backslash R$ による引き戻し $\pi^*\mathcal{L}$ を考えると

$$\pi^*\colon\ H^0(\Gamma\backslash R,\mathcal{L})\longrightarrow H^0(R,\pi^*\mathcal{L})$$

の像は Γ 不変な切断の全体 $H^0(R,\pi^*\mathcal{L})^\Gamma$ に他ならない．

スタック M_C の半安定なベクトル束からなる開部分スタック M_C^{ss} を考えると，自然なスタックの射 $\varphi\colon M_C^{\mathrm{ss}}\to\mathcal{M}_C^{SL_2}=\mathcal{M}_C$ が存在する．$\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_C)$ の生成元 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ が豊富な直線束であるようにとる．一方 $C\times M_C$ 上の普遍ベクトル束の行列式束の逆 $\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}$ が M_C 上に存在する．その制限 $\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}|M_C^{\mathrm{ss}}$ に引き戻し $\varphi^*\mathcal{L}$ が一致する．（$\mathcal{L}$ 自身が行列式束の逆である．）

すると，次の命題が成り立つ．

命題 4.80 $l\in\mathbb{Z}$, $l\geqq 0$ に対して，制限

$$H^0(M_C,\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l})\longrightarrow H^0(M_C^{\mathrm{ss}},\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l})$$

および

$$\varphi^*\colon\ H^0(\mathcal{M}_C,\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l})\longrightarrow H^0(M_C^{\mathrm{ss}},\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l})$$

は同型写像である．

［証明］ 略証を与える．$n\in\mathbb{Z}$ に対して，ベクトル束 E であって $H^1(C,E(nQ_0))=0$ かつ $E(nQ_0)$ が $H^0(C,E(nQ_0))$ で生成されているような E の全体のなす M_C の開部分スタック $M_C^{(n)}$ を考える．実は，この $M_C^{(n)}$ はあるスキーム $H^{(n)}$ の商として表示できる．$h(n)=\dim H^0(C,E(nQ_0))=2(n+1-g)$ とおく．すると，全射準同型 $\mathcal{O}_C^{h(n)}\to E(nQ_0)$ により E は $\mathcal{O}_C(nQ_0)^{h(n)}$ の商とみなせる．このような E の全体は，Grothendieck の Quot スキームの理論により，ある滑らかなスキーム $K^{(n)}$ でパラメータ付けできる．さらに，$\mathcal{E}$ を $C\times K^{(n)}$ 上の普遍ベクトル束として，$K^{(n)}$ 上の直線束 $(pr_2)_*\Lambda^2\mathcal{E}$ から 0 切断を除いた残りを $H^{(n)}$ と記す．すると，$M_C^{(n)}\simeq GL(h(n),\mathbb{C})\backslash H^{(n)}$ である．

さて，$n\geqq 2g$ としよう．すると，$M_C^{(n)}\supset M_C^{\mathrm{ss}}$ である．$H_{\mathrm{ss}}^{(n)}\subset H^{(n)}$ を $M_C^{\mathrm{ss}}\subset M_C$ に対応するスキームとする．このとき，$H^{(n)}\setminus H_{\mathrm{ss}}^{(n)}$ の余次元は 2 以上であることが証明できる．すると，射($p\colon H^{(n)}\to M_C^{(n)}$ および $\Gamma=GL_{h(n)}(\mathbb{C})$）に関して

$$H^0(M_C^{(n)},\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l})\simeq H^0(H^{(n)},p^*\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l})^\Gamma$$

が成り立つので，命題の前半は $H^{(n)} \supset H^{(n)}_{\mathrm{ss}}$ における Hartogs 型の定理に帰着される.

後半も，幾何学的不変式論による射 $q\colon H^{(n)}_{\mathrm{ss}} \to K^{(n)}_{\mathrm{ss}} \to \mathcal{M}_C^{SL_2}$ において $(q_*\mathcal{O}_{H^{(n)}_{\mathrm{ss}}})^{GL(h(n))} = \mathcal{O}_{\mathcal{M}_C}$ であることから直ちに従う. ∎

注意 4.81 以上の話は $\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\emptyset}}(\mathfrak{X})$ に対する Verlinde 同型を示すのに必要であるが，一般の $\mathcal{V}^\dagger_{\vec{\lambda}}(\mathfrak{X})$ に対しては，準放物構造(quasi-parabolic structure)をもつベクトル束(さらには G 主束)のモジュライを用いて同様の話を展開する必要があるが，ここでは割愛する.（Pauly [73], Laszlo–Sorger [61]を参照されたい.）

アフィン Grassmann 多様体と Borel–Weil–Bott 型の定理(ステップ(2))

空間 $\mathcal{Q} := SL_2(K)/SL_2(\mathcal{O})$ を**アフィン Grassmann 多様体**(affine Grassmann manifold)または**ループ Grassmann 多様体**(loop Grassmann manifold)と呼ぶ. $SL_2(K)$ と同様に $\mathcal{Q}$ は ind-scheme の構造をもつ.

一般の G (すなわち，単連結な単純代数群)に対して，商空間 $G(K)/G(\mathcal{O})$ はアフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト表現の理論において考察されてきた. それによると，次の定理が成り立つような $\mathbb{C}^* \times SL_2(\mathcal{O})$ の標準的な指標 χ と $\mathcal{Q}$ 上の標準的な可逆層 $\mathcal{L}_\chi$ が存在する.

定理 4.82 (S. Kumar, Mathieu) $\hat{\mathfrak{g}}$ 加群としての同型

$$H^0(\mathcal{Q}, \mathbb{L}_\chi^{\otimes l}) \simeq \mathcal{H}_0^\dagger$$

が存在する. □

$\mathcal{H}_0^\dagger(l) = \mathcal{H}_0^\dagger$ は既に何度も述べたようにレベル l のウェイト0に対応する可積分表現の双対空間である. また指標 χ は $\mathbb{C}^* \times SL_2(\mathcal{O})$ の第1成分への射影 χ_0 に対し $\chi := \chi_0^{-1}$ と定める. χ が $\mathcal{Q} = G(K)/G(\mathcal{O})$ 上の可逆層を定めることをいうには $\mathcal{Q}$ が $G(K)$ の(1次元)中心拡大 $\widehat{G}(K)$ の商 $\widehat{G}(K)/\widehat{G}(\mathcal{O})$ と同一視できることを使う. 拡大

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \widehat{G}(K) \longrightarrow G(K) \longrightarrow 1$$

はレベル1の可積分表現 $\mathcal{H}_0(1)$ が $G(K)$ の射影表現の構造をもつので，拡大

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(\mathcal{H}_0(1)) \longrightarrow PGL(\mathcal{H}_0(1)) \longrightarrow 1$$

を射影表現 $G(K) \to PGL(\mathcal{H}_0(1))$ により引き戻して得られる．また，$G(\mathcal{O}) \subset G(K)$ の $\widehat{G}(K)$ への引き戻し $\widehat{G}(\mathcal{O})$ は分裂している，すなわち，$\mathbb{C}^* \times G(\mathcal{O})$ に同型であることが知られており，自然に $\mathcal{Q} \simeq \widehat{G}(K)/\mathbb{C}^* \times G(\mathcal{O})$ であることが分かる．直線束 $\mathcal{L}_\chi$ は $\widehat{G}(K) \times \mathbb{C}$ の $\mathbb{C}^* \times \widehat{G}(\mathcal{O})$ による作用

$$(\lambda, h)\cdot(g, \alpha) = (\lambda hg, \lambda\alpha), \quad (\lambda, h) \in \mathbb{C}^* \times \widehat{G}(\mathcal{O}), \quad (g, \alpha) \in \widehat{G}(K) \times \mathbb{C}$$

による商として定義される．

注意 4.83　実は，Kumar, Mathieu が採用した $\mathcal{Q}$ の ind-scheme の構造は，ここでの説明とは大分異なる．2 通りの ind-scheme の構造が一致することを確かめる必要がある．

アフィン Grassmann 多様体 $\mathcal{Q}$ の基本的な性質として次の命題がある．

命題 4.84　$\mathcal{Q}$ は既約かつ被約である．　□

系 4.85　$G(A_C)$ は既約かつ被約である．ただし，$A_C := H^0(C \setminus \{Q_0\})$ である．

［証明］　系の証明を与える．安定束に対応する M_C^G の開部分スタック M_C^{s} は $\mathcal{M}_C^{\mathrm{ss}}$ の開部分多様体ともみなせて，特に滑らかなスキーム H の代数群 Γ による商として表示できる．そこで次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} H' & \longrightarrow & \mathcal{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & M_C^G \end{array}$$

ここで射 $H \to M_C^G$ は射の合成 $H \to M_C^{\mathrm{s}} \hookrightarrow M_C^G$ であり，H' は上の図式のファイバー積として定める．H を適当なその開部分スキームに置き換えると $H' \simeq H \times G(A_C)$ である．一方，$H' \to \mathcal{Q}$ は滑らかな射で連結なファイバーをもつので，$\mathcal{Q}$ の既約性と被約性から系が従う．　■

この系より，$G(A_C)$ の指標 $G(A_C) \to \mathbb{C}^*$ は自明なものしかないことが分かる．対応する Lie 代数の指標をみればよいからである．

$G(A_C)$ の $H^0(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes l})$ への作用を微分して $G(A_C)$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}(\mathfrak{X})$ の $H^0(\mathcal{Q}, \mathcal{L}_\chi^{\otimes l})$ への作用を得る．すると，$\mathcal{Q}$ の既約性および被約性から次が従う．

命題 4.86

$$H^0(\mathcal{Q},\mathcal{L}_\chi^{\otimes l})^{G(A_C)}=H^0(\mathcal{Q},\mathcal{L}_\chi^{\otimes l})^{\mathfrak{g}(\mathfrak{X})}$$

［証明］　包含関係 $\subset$ は常に成り立つ．$s\in H^0(\mathcal{Q},\mathcal{L}_\chi^{\otimes l})^{\mathfrak{g}(\mathfrak{X})}$，$g\in G(A_C)$ に対して，$\sigma=g^*s-s$ を $G(A_C)\times\mathcal{Q}$ 上の函数とみる．仮定より，$\forall x\in\mathbb{Q}(\mathbb{C})$ に対して $\sigma|G(A_C)\times\{x\}$ の微分が消えるので，$\sigma|G(A_C)\times\{x\}=0$ である．$\mathcal{Q}$ の被約性により $\sigma=0$ がいえて，逆の包含関係が従う．∎

最後に，$\mathcal{Q}$ 上の可逆層 $\mathcal{L}_\chi$ と M_C 上の行列式束 $\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}$ との比較が残っている．

命題 4.87　$\pi\colon\mathcal{Q}\to M_C$ による引き戻し $\pi^*\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}$ は $\mathcal{L}_\chi$ と一致する．

［証明］　略証を与える．準同型

$$\phi\colon\ SL_2(\mathbb{C})\longrightarrow SL_2(K),\quad g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}d&cz^{-1}\\bz&a\end{pmatrix}$$

を考えると，上半三角行列からなる部分群 $B\subset SL_2(\mathbb{C})$ の ϕ による像が $SL_2(\mathcal{O})$ の中に入ることから射 $\tilde{\phi}\colon\mathbb{P}^1\to\mathcal{Q}$ が得られる．実は，

$$\tilde{\phi}^*\colon\ \mathrm{Pic}(\mathcal{Q})\simeq\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$$

であり，かつ $\tilde{\phi}^*\mathcal{L}_\chi\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ が成り立つ(Kumar–Narasimhan–Ramanathan)．

したがって，上の命題は $\tilde{\phi}^*\pi^*\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}\simeq\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ を確かめることに帰着する．$\tilde{\phi}^*\pi^*\mathcal{L}_{\mathrm{univ}}$ は $\pi\circ\tilde{\phi}\colon\mathbb{P}^1\to M_C$ により M_C 上の普遍ベクトル束を $\mathbb{P}^1$ に引き戻したものの行列式束である．元 $\phi(g)\in SL_2(\mathcal{O})$ に対応するベクトル束は $C\setminus\{Q_0\}$ 上の自明なベクトル束と Q_0 の形式近傍 $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}=\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[[z]]$ でのベクトル束，すなわち $\mathbb{C}[[z]]$ 加群

$$\phi(g)(\mathbb{C}[[z]]^{\oplus 2})\subset z^{-1}\mathbb{C}[[z]]\oplus\mathbb{C}[[z]]\subset\mathbb{C}[[z]]^{\oplus 2}$$

を張り合わせて得られる．$(a:c)\in\mathbb{P}^1$ に対して

$$E_{(a:c)}=\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_C(Q_0)\oplus\mathcal{O}_C\xrightarrow{\kappa}\mathbb{C}_{Q_0})$$

と表示できる．ここで，$\mathbb{C}_{Q_0}$ は点 Q_0 に台(support)をもつ(skyscraper)層であり，$\kappa(z^{-1}f,g)=af(Q_0)-cg(Q_0)$ とおいた．普遍ベクトル束を $C\times\mathbb{P}^1$ に引き戻したものが $\mathcal{E}=(E_{(a:c)})_{(a:c)\in\mathbb{P}^1}$ である．$\mathcal{E}$ の行列式束が $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ であることは完全列

$$0\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow(\mathcal{O}_C(Q_0)\oplus\mathcal{O}_C)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\longrightarrow\mathbb{C}_{Q_0}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\longrightarrow 0$$

の順像のなす長完全列をみれば直ちに分かる. ∎

注意 4.88 上の計算において，行列式束とアフィン Lie 代数に対応する無限次元 Grassmann 多様体との関係が現れている．これは，KP 方程式系とその解(τ 函数)を Grassmann 多様体の点と同定する佐藤理論の一端に他ならない.

以上の諸結果を合わせると Verlinde の同型ができあがる.

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{M}_C^G, \mathbb{L}^{\otimes l}) &\simeq H^0(M_C^{\mathrm{ss}}, \mathbb{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l}) &&\simeq H^0(M_C^G, \mathbb{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l}) \\ &\simeq H^0(\mathcal{Q}, \pi^*\mathbb{L}_{\mathrm{univ}}^{\otimes l})^{G(A_C)} &&= H^0(\mathcal{Q}, \mathbb{L}_{\chi}^{\otimes l})^{G(A_C)} \\ &\simeq H^0(\mathcal{Q}, \mathbb{L}_{\chi}^{\otimes l})^{\mathfrak{g}(\mathfrak{X})} &&= \mathcal{V}_{\varnothing}^{\dagger}(\mathfrak{X}) \end{aligned}$$

これは $N=0$ の場合であり，N が一般の場合は準放物構造をもつベクトル束のモジュライを用いて Verlinde の同型が得られる.

階数 1 の場合との対比で，$H^0(\mathcal{M}_C^G, \mathbb{L}^{\otimes l})$ の元は一般化された(非 Abel 的)テータ函数と呼ばれる．その解析的な表示等，解明されていない事柄は多い.

《要約》

4.1 単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とそれから定義されるアフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の基本性質.

4.2 アフィン Lie 代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル l の最高ウェイト積分可能左加群とその双対加群の基本性質.

4.3 菅原型式によるエネルギー・運動量テンソルと Virasoro 代数の定義.

4.4 安定 N 点付曲線と形式近傍の定義.

4.5 形式近傍をもった安定 N 点付曲線 $\mathfrak{X}$ と単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から無限次元 Lie 代数 $\mathfrak{g}(\mathfrak{X})$ が構成できる.

4.6 共形ブロックの定義とその基本性質.

4.7 共形ブロックの分解定理.

4.8 形式近傍をもった安定 N 点付曲線の族の底空間上に共形ブロック層が定義される．共形ブロック層は局所自由層であり，射影的平坦接続を非特異曲線の軌跡上でもつ．この接続は境界上では確定特異点をもつ.

4.9 Verlinde の公式と $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の場合の証明の概要.

今後の方向と課題

同一の性質をもった数学的対象の全体に何らかの構造を入れて考察することが，最も一般的な意味でのモジュライの問題と考えられる．こうした意味ではモジュライの理論が数学の種々の分野と関係してくることは容易に想像されよう．本書は複素解析幾何学的な観点からモジュライについての基本的な部分の一部を論じたに過ぎない．モジュライの問題と関連する話題は広く，深い．特に，最近の数学と理論物理学との交流にはモジュライと関連する部分が多い．

第1章ではコンパクト複素多様体の変形理論を素朴な形で論じた．詳しい議論は小平[56]を参照していただきたい．第4章では半安定曲線の変形や点付半安定曲線の変形が問題となったように，特異点をもった代数多様体やコンパクト複素解析空間の変形を考えることが必要となり，小平–Spencer 理論を拡張する必要がある．その際，変形理論を圏論的な観点から捉えることが問題を整理する鍵になる．コンパクト複素多様体の変形理論では無限小変形が $H^1(M,\Theta_M)$ の元に対応し，変形の障害類は $H^2(M,\Theta_M)$ の元で与えられた．半安定曲線の場合は $H^1(M,\Theta_M)$ に対応するのは $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_M,\mathcal{O}_M)$ であり，$H^2(M,\Theta_M)$ に対応するのは $\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_M,\mathcal{O}_M)$ である．M が非特異代数曲線であれば $\Theta_M=\underline{Hom}_{\mathcal{O}_M}(\Omega^1_M,\mathcal{O}_M)$ であり，$H^i(M,\Theta_M)$ と $\mathrm{Ext}^i(\Omega^1_M,\mathcal{O}_M)$ は一致する．このことから，一般に特異点をもった代数多様体や複素解析空間の変形理論を考えるときには，Kähler 微分の層 Ω^1_M またはそれに関連した層が重要な役割を果たすことが推測できるであろう．変形理論で必要な層は一般の場合は唯一つの層ではなく余接複体(cotangent complex)と呼ばれる層の複体である．

Grothendieck による余接複体の一般論と変形理論への応用は Illusie [46]に詳しく述べられているが，あまりに一般的すぎてその意味を読みとることは

必ずしも簡単ではない．複素解析的な場合は Palamodov の方法に基づく余接複体の理論にきちんとした証明をつけ，Douady による Banach 解析空間の理論([27])を使って変形理論を論じたものに Bingener [11]がある．代数幾何学で Hilbert スキームを使うのは基本的であるが，Douady [27]は Banach 多様体の概念を導入して複素解析空間の場合に類似の議論を使うことを可能にした．その後，彼の理論は変形理論に有効に使われている．[11]では複素解析幾何学での変形理論の一般論を展開して，種々の複素解析幾何学的な対象に対して倉西族の存在を証明している．Douady 自身も，コンパクト複素多様体の場合に倉西族の存在証明を彼自身の手法を使って示している([26])．

また，変形理論はコンパクトな解析空間のみならず孤立特異点の場合にも興味ある結果がある(たとえば Artin [6]を参照されたい)．変形理論は完成された理論であるといえよう．ただ，Lie 代数の普遍展開環の q 変形として量子群が得られたように，通常の幾何学的対象の "非可換" 変形として非可換幾何学あるいは非線型幾何学と呼ぶべき新しい幾何学的な対象を得ることはまだ手探りの状態である．

第2章では紙数の関係もあり Torelli の定理の証明に焦点を当てた．そのため閉 Riemann 面のモジュライ空間の幾何学的な性質についてまったく述べることができなかった．この点に関しては，たとえば参考文献[23], [41]とそこに引用されている文献を参照していただきたい．モジュライ空間の幾何学はまだまだ不明なことが多く，特に数論幾何学的観点からの解明が待たれている．また，Jacobi 多様体に関する興味ある文献として Mumford [69]が，楕円積分の初歩から Jacobi 多様体，テータ函数さらに Siegel モジュラー型式を記した名著として Siegel [84]がある．一読をお勧めする．Siegel 上半空間上の函数として Siegel モジュラー型式が重要であるがまったく述べることができなかったので，Freitag [31]を参照していただきたい．

本書では Siegel 上半空間の商空間である Siegel モジュラー多様体の佐武コンパクト化とその特異点解消についても触れることができなかった．Chai [14], Namikawa [71]を参考にしていただきたい．

また，テータ函数については Mumford [70], [45]が特色ある教科書であ

る．Abel 多様体の理論に関しては Lange–Birkenhake [60], Mumford [68] を挙げておく．主偏極 Abel 多様体のなかで Jacobi 多様体を特徴づける問題は Schottky [76] 以来種々の考察がなされている．代数曲線はまた可積分系の理論と関係し，この観点から KP 方程式系を使った Jacobi 多様体の特徴づけも行なわれている．特に塩田隆比呂による Novikov 予想の解決は重要である．これらの点に関しては Arbarello–De Concini [5] およびそこで引用されている文献を参照されたい．KP 方程式系の理論は佐藤幹夫による普遍 Grassmann 多様体の理論と関係し，閉 Riemann 面のモジュライを別の観点から記述することができる．この理論は Abel 的共形場理論と関係する．Kawamoto–Namikawa–Tsuchiya–Yamada [50] はこの観点からも興味ある論文である．

ところで，Teichmüller 空間は最近では理論物理の超弦理論と関係し，また双曲幾何学とも関係して新しい観点からの研究が行なわれている．今吉–谷口 [47] が参考になろう．この本はまた Teichmüller 空間論への入門書としても優れている．Teichmüller 空間の高次元多様体への一般化も種々試みられている．特にコンパクト Kähler 多様体のモジュライ空間の複素微分幾何学的な性質を論じた文献としては Schumacher [77] が参考になろう．

第3章では，閉 Riemann 面の周期の理論，特に Torelli の定理が2次元以上の代数多様体にどう拡張される(べき)かということを中心に Hodge 理論の紹介を急ぎ足で行なった．周期の族としての性質を，小平–Spencer 理論による無限小構造と，境界(無限遠)での周期写像の挙動の2点に焦点を当てて述べた．Griffiths, Deligne らの理論が誕生して間もない頃の概説 Griffiths [36], Griffiths–Schmid [37] は今も原論文へのよい導入となる．Hodge 構造の無限小変形(IVHS)導入間もない時期の Griffiths et al. [39] においては，法函数(normal function)に関する進展の記述もある．その後の Hodge 理論の概説としては Brylinski–Zucker [12] がある．また，超越的な側面については CIME lectures [1] の中の，M. Green と C. Voisin の論文がよくまとまっている．

(弱)大域的 Torelli 問題については，紹介した通り多様体ごとに取り扱い

が異なり，それぞれ固有の代数幾何的な特徴を十分に理解してはじめて肯定的または否定的に解決されるので，一つのクラスの多様体ごとに1節あるいは1章が必要となる．K3曲面の場合([80])や$\mathbb{P}^4$の3次超曲面の場合(Clemens–Griffiths [15])を味わっていただくのが一番である．

本書で扱えなかった重要なテーマとして，Hodge 理論と代数的サイクルとのかかわりがある．奇数次のコホモロジーについてはAbel–Jacobi写像の一般化が，偶数次のコホモロジーについてはHodge予想が問題となる．さらにGrothendieckによる一般化されたHodge予想という問題もある．代数的サイクルがどれだけ存在するかは，個々の多様体ごとに微妙に変化する難しさがあり，これらの問題は今も解決から遠いようである．Motivesに関するAMS夏期研究集会の報告集[48]を参照されたい．

また，代数多様体の周期の数論的な性質を追究する問題として，Deligneの予想，さらにはそれを含むBeilinsonの予想がある．Hodge構造は，代数多様体のHasse–Weilゼータ関数の無限素点でのEuler因子の記述に直接かかわる．有限素点(p)ではp進Hodge理論が同様の役割を果たす．これらについては，[74], [79]を参照されたい．

(混合)Hodge構造を局所的にした概念として，斉藤盛彦のHodge加群の理論がある．これはl進エタール層での偏屈層(perverse sheaf)の理論のHodge理論的対応物であり，高次順像の分解定理もHodge理論の枠組みで証明されている．Zuckerの退化係数のHodge理論を特別な場合として含んでいる(Brylinski–Zucker [12]を参照されたい)．

Hodge理論の非Abel化に関しては，基本群のHodge理論と主束のモジュライ空間のHodge理論的な扱いが挙げられる．Morganは基本群$(\otimes\mathbb{Q})$のHodge構造を構成した．それは反復積分(iterated integral)の立場からHainにより再構成された．これについては，Brylinski–Zucker [12]を参照されたい．一方，主束のモジュライ空間のHodge理論は閉Riemann面の場合のNarasimahn–Seshadriの定理に端を発し，Simpson, Corletteらにより一般化された．閉Riemann面の場合は第4章の共形場理論，特にVerlindeの公式とつながりが深い．また，Kähler多様体の位相のもつ制約を示すのに応用

されている(Simpson [85]を参照のこと).

もう一つ，Hodge 理論の(物理学の)超弦理論への応用を挙げておこう. Hodge 構造の変形，Gauss–Manin 接続は，$t\bar{t}$ フュージョンの方程式において現れた. また，超弦理論の Calabi–Yau 多様体での“コンパクト化”の摂動的扱いにおいてミラー対称性が発見されているが，3 次元 5 次超曲面をはじめとするトーリック多様体の Calabi–Yau 完全交叉の Hodge 構造の変形の計算が決め手である. そこでは小平–Spencer 写像の接写像が湯川カップリングという名前で登場し，また Calabi–Yau 多様体のモジュライ空間の境界の点であって，局所モノドロミーが極大にべき単な(maximally unipotent)な半安定退化に対応する点が“半径が大きな極限”という名前で登場する. Voisin [97], Cox–Katz [16]を参照されたい.

第 4 章では非 Abel 的共形場理論を論じたが，非 Abel 的共形場理論へは種々のアプローチが可能である. Hitchin [44]はベクトル束のモジュライ空間をもとにして射影的平坦接続を定義している. また，本書で扱った理論は $\mathbb{P}^1$ 上では Tsuchiya–Kanie [90]が詳しく論じている. [90]は共形場理論の数学的に厳密な定式化に成功した最初の論文である. 論文[90]では頂点作用素が活躍したが，本書の方法では頂点作用素は後に控えた形になっている. これは種数 2 以上の Riemann 面の場合に共形ブロックを積分を使って表示する積分表示の問題が十分に解明されていないことと関係している. 共形ブロックの積分表示の問題は $\mathbb{P}^1$ の場合は KZ 方程式の解を積分を使って表示することを意味する. $\mathbb{P}^1$ 上の場合は土屋の講義録[92]を参照されたい. 積分表示の問題は論文[10], [30]で最初に取り扱われた. 共形場理論の物理的なアプローチについては Moore–Seiberg [66]が参考になろう. また，Friedan–Shenker [32]の論文は先駆的な意味をもっている.

第 4 章の冒頭で述べた共形場理論の特徴づけは Segal [78]のモジュラー函手(modular functor)の考えを利用した. モジュラー函手という名前はモジュライの函手論的取り扱いで出てくるモジュライ函手(moduli functor)と紛らわしいが，名前は定着してしまった感がある. モジュラー函手は 3 次元多様体に関する位相的場の理論(Topological Field Theory にちなんで TFT と

呼ばれることが多い)と密接に関係している．この点に関しては河野[57] を参照されたい．

本書では共形場理論に関してベクトル束のモジュライ空間に少し触れただけであるが，ベクトル束のモジュライ空間は 4 次元トポロジーとも関係して，その幾何学は重要である．この点に関しては Okonek–Van de Ven [72]が参考になろう．Donaldson 理論は Seiberg–Witten 理論によって面目を一新しつつあることを付け加えておこう．

単行本化にあたっての追記

モジュライに関連する話題について，1999 年 6 月に本書が出版されてから様々な展開があった．いくつかの主要な進展について以下で述べよう．

まず第 1 章の変形理論について．

代数曲線のモジュライ空間を代数多様体として構成するために，幾何学的不変式論が作られ使われる．しかし，代数的スタック(algebraic stack)としてモジュライ空間を扱う Deligne–Mumford による方法があり，最近の安定写像のモジュライ空間の扱いで使われている．Deligne–Mumford の代数的スタックは，微分多様体のカテゴリーでの軌道体(orbifold)に相当する．さらに一般的な Michael Artin の意味の代数的スタック[LMB] が定義されているが，その変形理論も部分的に構築されている[Aok], [Ols]．非可換代数幾何学の枠組みにおける変形理論として，Abel 圏の無限小変形の理論が Lowen と van den Bergh [LvdB]により作られている．

弦理論では Lagrange 関数に含まれるパラメータの変化に対応して様々な対象の変形を考える必要が生じ，モジュライという言葉も定着した．Douglas の Π 安定性を定式化した Bridgeland の安定性条件[Bri]は，導来圏の heart の変形を記述する．

また近年，[Ser], [Gre]といった成書が出版された．

第 2 章の閉 Riemann 面に対する Torelli の定理について，[BP]で Jacobi 多様体の連接層の導来圏での Fourier–向井変換を用いた Torelli の定理の別証明が与えられた．[Pol]は Abel 多様体とテータ関数を圏論的に扱った成書

である.

第3章のHodge理論に関して，本書を補い代数的サイクルに関する話題も扱うものとして，[Voi1]を挙げておこう．Hodge理論の新たな応用として，コンパクトKähler多様体の位相・ホモトピー型についてのC.Voisinの仕事[Voi2]がある．複素トーラスのブローアップで得られる多様体で，射影多様体のホモトピー型を持たない(したがって，特に射影多様体に変形同値でない)例が構成された.

なお，本書で述べた周期写像の理論に関する成書として[CP]を挙げておく.

第4章の共形場理論に関しては，Yi -Zhi Huang [Hua]がC_2有限条件を満たし正定値不変内積を持つ一般の有理頂点作用素代数に共形ブロックを構成してそのモジュラー不変性を示した．Verlindeの公式の証明については，A_1型の場合に共形場理論を使わない証明が向井[67]において論ぜられている.

非Abel的共形場理論の共形ブロックは，非Abel的テータ関数の空間と解釈できるが[Beau1], [Beau2]，表現のレベルとベクトル束の階数を入れ替える対称性が証明された[MO]．またLaszlo [Las]は，菅原形式から定まる共形ブロックの接続とHitchinの接続とが一致することを確かめている．[BF1]も同様の両立性を示している．また非Abel的共形場理論の応用として，[AU]では本書で述べた非Abel的共形場理論とAbel的共形場理論を使って2次元モジュラー函手を構成し，量子群やスケイン関係式を使った構成法とは異なる形で位相的場の理論を構成している.

本書では扱っていない臨界レベル(critical level)のアフィンLie環の表現と幾何学的Langlands対応との関係は，Drinfeld等により指摘されており，Beilinson-Drinfeld [BD]は頂点作用素代数を代数曲線上で局所化したものに相当するカイラル代数の一般論を展開して，幾何学的Langlands対応へ応用している．頂点作用素代数と代数曲線とのより具体的な関係については[BF2]を，幾何学的Langlands対応との関係については[Fre1], [Fre2]を参照されたい.

[LMB] G. Laumon and L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge 39, Springer–Verlag, 2000.

[Aok] M. Aoki, Deformation theory of algebraic stacks. *Compos. Math.* **141**(2005), no. 1, 19–34.

[Ols] M. C. Olsson, Deformation theory of representable morphisms of algebraic stacks, *Math. Zeitschrift* **253**(2006), no.1, 25–62.

[Bri] T. Bridgeland, *Derived categories of coherent sheaves*, Proceedings of ICM 2006. arXiv:math/0602129.

[LvdB] W. Lowen and M. van den Bergh, Deformation theory of abelian categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358**(2006), 5441–5483. math.CT/0405226.

[Ser] E. Sernesi, *Deformations of Algebraic Schemes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 334, Springer, 2006.

[Gre] G.-M. Greuel, C. Lossen, and E. Shustin, *Introduction to singularities and deformations*, Springer Monographs in Mathematics, 2007.

[BP] A. Beilinson and A. Polishchuk, Torelli theorem via Fourier–Mukai transform, Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999), *Progr. Math.* **195**, Birkhäuser(2001), 127–132.

[Pol] A. Polishchuk, *Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform*, Cambridge University Press, 2002.

[Voi1] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisé 10, collection SMF (2002); Hodge theory and complex algebraic geometry I, II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **76**, **77**, Cambridge University Press, 2002, 2003.

[Voi2] C. Voisin, On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds, *Inventinoes Math.* **157**(2004), 329–343; On the homotopy type of Kähler manifolds and the birational Kodaira problem, *J. Differential Geom.* **72**(2006), 43–71.

[CP] J. Carson, S. Müller–Strach and C. Peters, *Period mappings and Period domains*, Cambridge University Press, 2003.

[Hua] Y.-Z. Huang, Vertex operator algebras, the Verlinde conjecture, and modular tensor categories, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* **102**(2005), no.15, 5352–5356.

[Beau1] A. Beauville, Vector bundles on curves and generalized theta functions: recent results and open problems. Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93), *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **28**, Cambridge University Press(1995), 17–33.

[Beau2] A. Beauville, Vector bundles on curves and theta functions, Moduli spaces and arithmetic geometry, *Adv. Stud. Pure Math.* **45**, Math. Soc. Japan(2006), 145–156.

[MO] A. Marian and D. Oprea, The rank-level duality for non-abelian theta functions, *Inventinoes Math.* **168**(2007), 225–247. arXiv:0710.2908.

[Las] Y. Laszlo, Hitchin's and WZW connections are the same, *J. Differential Geom.* **49**(1998), no. 3, 547–576.

[BF1] D. Ben-Zvi and E. Frenkel, Geometric Realization of the Segal–Sugawara Construction. arXiv:math/0301206.

[AU] J. E. Anderson and K. Ueno, Geometric construction of modular functors from Conformal Field Theory, *J. Knots and its ramifications.* **16**(2007), 127–202.

[BD] A. Beilinson and V. Drinfeld, *Chiral Algebras*, American Mathematical Society, 2004.

[BF2] D. Ben-Zvi and E. Frenkel, *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, Mathematical Surveys and Monographs 88, American Mathematical Society, 2001; 2nd ed. 2004.

[Fre1] E. Frenkel, *Lectures on the Langlands program and conformal field theory.* hep-th/0512172.

[Fre2] Edward Frenkel, *Langlands Correspondence for Loop Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 103, Cambridge University Press, 2007.

参考文献

[1] A. Albano and F. Bardelli(eds.), *Algebraic Cycles and Hodge Theory*, Centro Internazionale Matematico Estivo(C. I. M. E.) Torino 1993, Lecture Notes in Math. 1594, Springer, 1994.

[2] A. Andreotti, On a theorem of Torelli, *Amer. J. Math.* **80**(1958), 801–828.

[3] A. Andreotti and A. L. Mayer, On period related for abelian integrals on algebraic curves, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **21**(1967), 189–238.

[4] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves, 1*, Springer, 1985.

[5] E. Arbarello and C. De Concini, Geometric aspect of the Kadomtsev-Petviashivili equation, Lecture Notes in Math. 1451, Springer, 1990, 95–137.

[6] M. Artin, *Lectures on Deformation of Singularities*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976.

[7] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer, 1984.

[8] A. Beauville and Y. Laszlo, Conformal blocks and generalized theta functions, *Comm. Math. Phys.* **164**(1994), 385–419.

[9] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys.* **B241**(1984), 333–380.

[10] D. Bernard and G. Felder, Fock representations and BRST cohomology in $SL(2)$ current algebra, *Commun. Math. Phys.* **127**(1990), 145–168.

[11] J. Bingener, *Lokale Modulräume in der analytischen Geometrie*, Band 1, Band 2, Vieweg, 1987.

[12] J.-L. Brylinski and S. Zucker, "An overview of recent advances in Hodge theory" in *Several Complex Variables, VI*, Encyclopaedia Math. Sci. 69, Springer, 1990, 39–142.

[13] A. Cappelli, C. Itzykson and J.-B. Zuber, Modular invariant Partition functions in two dimensions, *Nucl. Phys.* **B280**(1987), 445–465.

[14] C.-L. Chai, *Compactification of Siegel Moduli Schemes*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 107, Cambridge Univ. Press, 1985.

[15] H. Clemens and P. Griffiths, The intermediate Jacobian of cubic threefolds, *Ann. of Math.* **95**(1972), 281–356.

[16] D. A. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Mathematical Surveys and Monographs 68, American Mathematical Society, 1999.

[17] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publ. Math. IHES* **35**(1968), 107–126.

[18] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES* **36**(1969), 75–109.

[19] P. Deligne, *Équations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, Lecture Notes in Math. 163, Springer, 1970.

[20] P. Deligne, Théorie de Hodge, II, III, *Publ. Math. IHES* **40**(1971), 5–57; *ibid.* **44**(1974), 6–77.

[21] P. Deligne, La conjecture de Weil, II, *Publ. Math. IHES* **52**(1980), 137–252.

[22] R. Dijkgraaf and E. Verlinde, Modular invariance and the fusion algebra, *Nucl. Phys.* (Proc. Suppl.) **B5**(1988), 87–97.

[23] R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer(eds.), *The Moduli Space of Curves*, Progress in Math. 129, Birkhäuser, 1995.

[24] R. Donagi, Generic Torelli theorem for projective hypersurfaces, *Compositio Math.* **50**(1983), 325–353.

[25] R. Donagi, "The Schottky problem" in *Theory of Moduli*, Lecture Notes in Math. 1337, Springer, 1988, 84–137.

[26] A. Douady, "Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes" in *Séminaire Bourbaki 1964/65*, Exposé 277, Société Mathématique de France, 1964.

[27] A. Douady, Le problème des modules pour les sou-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier* **16**(1966), 1–95.

[28] G. Faltings, A proof for the Verlinde formula, *J. Algebraic Geom.* **3**(1994),

347–374.

[29] J. D. Fay, *Theta Functions on Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math. 352, Springer, 1973.

[30] G. Felder, BRST approach to minimal models, *Nucl. Phys.* **B317**(1989), 215–236.

[31] E. Freitag, *Siegelsch Modulfunktionen*, Springer, 1983.

[32] D. Friedan and S. Shenker, The analytic geometry of two dimensional conformal field theory, *Nucl. Phys.* **B281**(1987), 509–545.

[33] R. Friedman, A proof of the global Torelli theorem for polarized K3 surfaces, *Ann. of Math.* **120**(1984), 237–269.

[34] O. Gabber, The integrability of the characteristic variety, *Amer. J. Math.* **103**(1981), 445–468.

[35] P. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds, I, II, III, *Amer. J. Math.* **90**(1968), 568–626, 805–865; *Publ. Math. IHES.* **38**(1970), 125–180.

[36] P. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76**(1970), 228–296.

[37] P. Griffiths and W. Schmid, "Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results" in *Discrete Subgroups of Lie Groups and Applications to Moduli*, Oxford Univ. Press, 1975, 31–127.

[38] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Interscience, 1978.

[39] P. Griffiths et al., *Topics in Transcendental Algebraic Geometry*, Annals of Math. Studies 106, Princeton Univ. Press, 1984.

[40] A. Grothendieck, "Techniques de construction en géométrie analytique, I–X" in *Séminaire Cartan 1960/61*, Secrétariat Mathématique, Paris, 1962.

[41] J. Harris and I. Morrison, *Moduli of Curves*, Springer, 1998.

[42] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 52, Springer, 1977.

[43] T. Hayashida and M. Nishi, Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves, *J. Math. Soc. Japan* **17**(1965), 1–16.

[44] N. J. Hitchin, Flat connections and geometric quantization, *Commun.*

Math. Phys. **131**(1990), 347–380.

[45] J. Igusa, *Theta Functions*, Springer, 1972.

[46] L. Illusie, *Complexe Cotangent et Déformations, I, II*, Lecture Notes in Math. 239, 283, Springer, 1971, 1972.

[47] 今吉洋一・谷口雅彦，タイヒミュラー空間論，日本評論社，1989.

[48] U. Jannsen, S. Kleiman and J.-P. Serre(eds.), *Motives*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 55, Part I, II, American Mathematical Society, 1994.

[49] V. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1990.

[50] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya and Y. Yamada, Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, *Commun. Math. Phys.* **116**(1988), 247–308.

[51] G. Kempf, On the geometry of a theorem of Riemann, *Ann. of Math.* **98**(1973), 178–185.

[52] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions, *Nucl. Phys.* **B247**(1984), 83–103.

[53] 小林昭七，複素幾何，岩波書店，2005.

[54] K. Kodaira and D. C. Spencer, On deformations of complex analytic structures, I, II, III, *Ann. of Math.* **67**(1958), 328–466; *ibid.* **71**(1960), 43–76.

[55] K. Kodaira, On compact analytic surfaces, II, *Ann. of Math.* **77**(1963), 563–626.

[56] 小平邦彦，複素多様体論，岩波書店，1992.

[57] 河野俊丈，場の理論とトポロジー，岩波書店，2008.

[58] S. Kumar, M. S. Narasimhan and A. Ramanathan, Infinite Grassmannian and moduli space of G-bundles, *Math. Ann.* **300**(1993), 395–423.

[59] M. Kuranishi, "New proof for the existence of locally complete families of complex structures" in *Proc. Confer. on Complex Analysis, Minneapolis 1964*, Springer, 1965.

[60] H. Lange and Ch. Birkenhake, *Complex Abelian Varieties*, Springer, 1992.

[61] Y. Laszlo and C. Sorger, The line bundles on the moduli of parabolic G-bundles over curves and their sections, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*

(4)**30**(1997), 499–525.

[62] S. Lefschetz, *L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique*, Gauthier-Villars, 1924(reproduced in *Selected Papers*, Chelsea, 1971).

[63] D. Liebermann, C. Peters, R. Wilsker, A theorem of local Torelli type, *Math. Ann.* **231**(1977), 39–45.

[64] H. H. Martens, A new proof of Torelli's theorem, *Ann. of Math.* **78**(1963), 107–111.

[65] T. Matsusaka, On a theorem of Torelli, *Amer. J. Math.* **80**(1958), 784–800.

[66] G. Moore and N. Seiberg, Classical and quantum conformal field theory, *Commun. Math. Phys.* **123**(1989), 177–254.

[67] 向井 茂, モジュライ理論, 岩波書店, 2008(刊行予定).

[68] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford Univ. Press, 1970.

[69] D. Mumford, *Curves and their Jacobians*, Univ. Michigan Press, 1975.

[70] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta, I, II, III*, Progress in Math. 28, 43, 97, Birkhäuser, 1983, 84, 91.

[71] Y. Namikawa, *Toroidal Compactification of Siegel Spaces*, Lecture Notes in Math. 812, Springer, 1980.

[72] Ch. Okonek and A. Van de Ven, "Stable bundles and C^∞-structures on algebraic surfaces" in *Encyclopaedia of Mathematical Sciences 69, Several Complex Variables VI*, Springer, 1990, 198–249.

[73] R. Pauly, Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes, *Duke Math. J.* **84**(1996), 217–235.

[74] M. Rapoport, N. Schappacher, P. Schneider(eds.), *Beilinson's Conjectures on Special Values of L-functions*, Perspectives in Math. Vol. 4, Academic Press, 1988.

[75] W. Schmid, Variation of Hodge structure: The singularities of the period mapping, *Invent. Math.* **22**(1973), 211–319.

[76] F. Schottky, Über die Moduln der Thetafunktionen, *Acta Math.* **27**(1903).

[77] G. Schumacher, "The theory of Teichmüller spaces, a view towards moduli spaces of Kähler manifolds" in *Encyclopaedia of Mathematical Sciences 69, Several Complex Variables VI*, Springer, 1990, 251–310.

[78] G. Segal, The definition of conformal field theory, preprint.

[79] Sém. Bures, *Périodes p-Adiques* (Séminaire de Bures 1988), Astérisque 223, Société Mathématique de France, 1994.

[80] Sém. Palaiseau, *Géométrie des Surfaces K3: modules et périodes* (Séminaire Palaiseau 1981/82), Astérisque 126, Société Mathématique de France, 1985.

[81] T. Shioda and N. Mitani, "Singular abelian surfaces and binary quadratic forms" in *Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds*, Lecture Notes in Math. 412, Springer, 1974, 255–287.

[82] T. Shioda, The period map of abelian surfaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. IA, **25**(1978), 47–59.

[83] C. Siegel, Symplectic geometry, *Amer. J. Math.* **65**(1943), 1–86.

[84] C. Siegel, *Topics in Complex Function Theory, 1, 2, 3*, Interscience, 1969, 71, 73.

[85] C. Simpson, "Nonabelian Hodge theory" in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, 1*, Math. Soc. Japan, 1991, 747–756.

[86] C. Sorger, "La formule de Verlinde" in *Séminaire Bourbaki 1994/95*, Exposé 794, Astérisque 237, Société Mathématique de France, 1996, 87–114.

[87] J. Steenbrink, Limits of Hodge structures, *Invent. Math.* **31**(1976), 229–257.

[88] T. Suzuki, Finite-dimensionality of the space of conformal blocks, preprint.

[89] 谷崎俊之，非可換環，岩波書店，2006.

[90] A. Tsuchiya and Y. Kanie, "Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid group" in *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models*, Advanced Studies in Pure Mathematics 16, Kinokuniya Shoten and Academic Press, 1988, 297–326.

[91] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada, "Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries" in *Integrable Systems in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Advanced Studies in Pure Mathematics 19, Kinokuniya Shoten and Academic Press, 1989, 459–566.

[92] 土屋昭博(永友清和 記)，共形場理論入門，大阪大学数学講義録 1，1993.

[93] K. Ueno, "Introduction to conformal field theory with gauge symmetries" in *Geometry and Physics*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 184, Marcel Dekker, 1996, 603–745.

[94] 上野健爾，代数幾何，岩波書店，2005.

[95] E. Verlinde, Fusion rules and modular transformations in 2-D conformal field theory, *Nucl. Phys.* **B300[FS22]**(1988), 360–376.

[96] E. Viehweg, *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge, Bd. 30, Springer, 1995.

[97] C. Voisin, *Symétrie Mirroir*, Panoramas et Synthèses 2, Société Mathématique de France, 1996.

[98] C. Weibel, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Math. 38, Cambridge Univ. Press, 1994.

[99] A. Weil, Zum Beweis des Torellischen Satzes, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. IIa*(1957), 33–53.

問 解 答

第1章

問1 $\mathcal{U}$, U, $\pi^{-1}(U)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$, $\mathcal{U}_\lambda$ の局所座標 $(z_\lambda^1,\cdots,z_\lambda^n,w^1,\cdots,w^m)$ はこれまでの議論と同一とする．$\sum_k a_k(w)\dfrac{\partial}{\partial w^k}\in\Gamma(U,\Theta)$ は $\Gamma(\pi^{-1}(U),\pi^*\Theta)$ の元を定義し，さらに各 U_λ 上で $\theta_\lambda=a_k(w)\dfrac{\partial}{\partial w^k}\in\Gamma(U_\lambda,\Theta_V)$ を定める．$U_\lambda\cap U_\mu$ のとき U_μ の座標で考えると(1.1)より

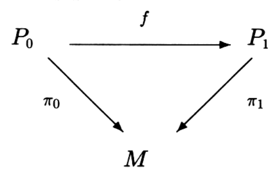
$$\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right)_\lambda=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial w^k}\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i}+\left(\frac{\partial}{\partial w^k}\right)_\mu$$

が成立するので

$$\theta_\lambda-\theta_\mu=\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n a_k(w)\frac{\partial f_{\lambda\mu}^i}{\partial w^k}\frac{\partial}{\partial z_\lambda^i}$$

が成立する．したがって $\tau=\rho$ である．

問2 $\{g_{\lambda\mu}\}$ からできる G 主束を $\pi_0\colon P_0\to M$，$\{h_{\lambda\mu}\}$ からできる G 主束を $\pi_1\colon P_1\to M$ と記す．仮定により可換図式



を与える同型写像 $f\colon P_0\to P_1$ が存在する．f は $\pi_0^{-1}(U_\lambda)=U_\lambda\times G$ から $\pi_1^{-1}(U_\lambda)=U_\lambda\times G$ への U_λ 上恒等写像である G 同型を与えるので $f_\lambda=f|\pi^{-1}(U_\lambda)$ は

$$f_\lambda((z,g))=(z,g_\lambda^{(z)}g)$$

と表される正則写像 $g_\lambda\colon U_\lambda\to G$ が存在する．P_0 は $z\in U_{\lambda\mu}$, $(z,g)\in U_\lambda\times G$, $(z,h)\in U_\lambda\times G$ とを

$$(z,g)=(z,g_{\lambda\mu}^{(z)}h)$$

で同一視した．このとき $f_\lambda((z,g))=(z,g_\lambda(z)g)$ と $f_\mu((z,h))=(z,g_\mu(z)h)$ とは P_1 で同一の元を与えるので

$$(z,g_\lambda(z)g)=(z,h_{\lambda\mu}(z)g_\mu(z)h)$$

が成立しなければならない．$g=g_{\lambda\mu}(z)h$ であったので

$$g_\lambda(z)g_{\lambda\mu}(z)=h_{\lambda\mu}(z)g_\mu(z)$$

が成立する．すなわち $z\in U_{\lambda\mu}$ に対して

$$g_{\lambda\mu}=g_\lambda(z)^{-1}h_{\lambda\mu}(z)g_\mu(z)$$

が成立する．逆にこの関係式が成立すれば P_0 と P_1 とは同型であることが，上の議論を逆にたどることによって分かる．

第3章

問1 $\{F^p\}\in\check{D}$, $\{G^p\}\in\check{D}$ のとき $Q_{F^p}=Q|F^p$, $Q_{G^p}=Q|G^p$, $1\leqq p\leqq w$ とおく．このとき $Q_{F^w}(u,v)=Q_{G^w}(g_w(u),g_w(v))$ が成り立つように同型写像 $g_w\colon F^w\simeq G^w$ を選ぶことができる．この同型を $Q_{F^{w-1}}(u,v)=Q_{G^{w-1}}(g_{w-1}(u),g_{w-1}(v))$ が成り立つように同型 $g_{w-1}\colon F^{w-1}\simeq G^{w-1}$ に拡張することができる．以下この操作を繰り返して同型写像 $g\colon H_{\mathbb{C}}\simeq H_{\mathbb{C}}$ を得る．構成法より $g\in \mathrm{Aut}(H_{\mathbb{C}},Q)$ である．D の場合も同様．

問2 単射性は明らかである．全射性は

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}+F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

に他ならない．ところで

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=F^1\oplus\mathfrak{g}^{0,0}\oplus\overline{F^1}$$

より，

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}^{0,0}\oplus(F^1+(F^1\oplus\overline{F^1})\cap\mathfrak{g})$$

が成り立つ．右辺が $\mathfrak{g}+F^0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ に含まれることは明らかである．

問3 小平–Spencer 理論は偏極多様体 (X,L) の変形にも拡張される[54]．直線束 L の同型類 $[L]\in\mathrm{Pic}(X)=H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ の $d\log\colon\mathcal{O}^*\to\Omega_X^1$ が誘導する準同型による像 $c_1'(L)\in H^1(X,\Omega_X^1)=\mathrm{Ext}^1(\Theta_X,\mathcal{O}_X)$ は，拡大

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{D}_L^{\leqq1}\longrightarrow\Theta_X\longrightarrow0$$

を定める．局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{D}_L^{\leqq1}$ のコホモロジー $H^1(X,\mathcal{D}_L^{\leqq1})$ が，組 (X,L) の倉西族の接空間を与える．

上の短完全列から得られる完全列

$$H^1(X,\mathcal{D}_L^{\leqq1})\longrightarrow H^1(X,\Theta_X)\longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

の最初の写像の像が，直線束 L の拡張する方向である．したがって，それは第2の写像 δ の核に等しい．δ は拡大の定める上の短完全列による余境界写像ゆえ，

補題 3.22 により $c_1'(L)$ とのカップ積で与えられる.

$c_1(L)$ は定義により指数完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_* \longrightarrow 0$$

から得られる余境界写像 $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ による $[L]$ の像である.

指数完全列と拡大の定める上の短完全列を比較することにより，$c_1'(L)$ は合成写像 $H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \Omega_X^1)$ (2 つ目の写像は Hodge 分解による射影) による $c_1(L)$ の像であることが確かめられる.

問 4　(1)は容易. (2), (3)はそれぞれ

$$\{(B+B') \cap (C+C')\} \cap D = E$$

$$\{(B+B') \cap (C+C')\} + D = \{(B+D) \cap (C+D)\}$$

を示すことに他ならないが，(1)を使えば容易に示せる.

問 5　$p+q=n, n-1$ について，$H_F^{p,q} = W_{p+q} \cap F^p \cap \overline{F}^q$ が成り立つことに注意せよ.

問 6　N フィルターの定義の条件が，この公式を与えることは直接書き下せばよい. べき単指数 M が $1, 2$ のときの $W(N)$ はそれぞれ次で与えられる.

$$W_{-2} = 0 \subset W_{-1} = \operatorname{Im} N \subset W_0 = \operatorname{Ker} N \subset W_1 = H$$

$$W_{-3} = 0 \subset W_{-2} = \operatorname{Im} N^2 \subset W_{-1} = \operatorname{Im} N \cap \operatorname{Ker} N$$
$$\subset W_0 = \operatorname{Im} N + \operatorname{Ker} N \subset W_1 = \operatorname{Ker} N^2 \subset W_2 = H$$

問 8　$W_0 = N^{-1}(W_{-2})$ より明らか.

問 9　N に関する原始的分解を使う.

問 10　最初の等式は,

$$\dim \operatorname{Gr}_2^W H^2(X_s) = \dim H^2(X_s) - 2\dim \operatorname{Gr}_1^W H^2(X_s) - 2\dim \operatorname{Gr}_0^W H^2(X_s)$$

を書き下したもの. 2 番目の等式は，原始的分解 $\operatorname{Gr}_2^W H^2(X_s) = P\operatorname{Gr}_2^W \oplus NP\operatorname{Gr}_4^W$ を用いる. まず,

$$NP\operatorname{Gr}_4^W \simeq P\operatorname{Gr}_4^W \simeq P\operatorname{Gr}_0^W = \operatorname{Gr}_0^W \simeq \operatorname{Gr}_0^W H^2(X_0)$$

に注意する. また，N の両立性(strictness)から,

$$P\operatorname{Gr}_2^W = \operatorname{Ker}(N\colon \operatorname{Gr}_2^W \to \operatorname{Gr}_0^W) \simeq \operatorname{Gr}_2^W(\operatorname{Ker} N)$$

である. 上の Clemens–Schmid 完全列より

$$0 \longrightarrow \operatorname{Gr}_0^W H^0(X_s) \longrightarrow \operatorname{Gr}_{-4}^W H_4(X_0) \longrightarrow \operatorname{Gr}_2^W H^2(X_0) \longrightarrow \operatorname{Gr}_2^W(\operatorname{Ker} N) \longrightarrow 0$$

を得る. $\operatorname{Gr}_k^W H^2(X_0)$ を計算するスペクトル系列が E_2 項で退化することから，$\operatorname{Gr}_2^W H^2(X_0) = E_2^{0,2} = \operatorname{Ker}(E_1^{0,2} \to E_1^{1,2})$ である. また，E_1 項は分かっている. 後は，$\operatorname{Gr}_0^W H^0(X_s) \cong \operatorname{Gr}_0^W H^0(X_0)$, $\operatorname{Gr}_{-4}^W H_4(X_0) \cong \operatorname{Gr}_4^W H^4(X_0)^* \cong H^4(X^{(0)})^*$ に注

意して，上の完全列の次元の交代和を考えればよい．

第4章

問1 同型 $f: C \to C$ は C の既約成分の間の置換を引き起こすが，C の既約成分の個数は有限であるので $f^m = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m}$ が各既約成分を自分自身へ移すように m を見出すことができる．したがって f 自身が C の各既約成分を自分自身へ移すと仮定しても問題を解く上で一般性を失わない．C の既約成分 C_i 上にある C の特異点を $P_1, \cdots, P_k$，$\{Q_1, \cdots, Q_n\}$ のうち C_i 上にあるものを $Q_{i_1}, \cdots, Q_{i_l}$ とする．$f_i = f|C_i$ とおく．f_i は C_i の非特異モデル $\widetilde{C}_i$ の自己同型 $\widetilde{f}_i$ を引き起こす．したがって $\widetilde{C}_i$ の種数が2以上であれば，f_i は有限個しか存在しない．また C_i が $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ のときは $k+l \geqq 3$ であれば f_i は有限個，さらに C_i が楕円曲線のときも $k+l \geqq 1$ であれば f_i は有限個である．また $\widetilde{C}_i = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ のときは $k \geqq 2$ であれば f_i は有限個，$\widetilde{C}_i$ が楕円曲線のときは $k \geqq 1$ であれば f_i は有限個である．以上の事実を使えば問1は簡単に証明できる．

欧文索引

和文索引

ア 行

カ 行

サ 行

ラ 行

上野健爾

1945 年生まれ
1968 年東京大学理学部数学科卒業
現在　京都大学理学部数学科教授
専攻　複素多様体論

清水勇二

1958 年生まれ
1982 年東京大学理学部数学科卒業
現在　国際基督教大学教養学部教授
専攻　代数幾何学

複素構造の変形と周期——共形場理論への応用

2008 年 9 月 5 日　第 1 刷発行

著　者　上野健爾（うえのけんじ）　清水勇二（しみずゆうじ）

発行者　山口昭男

発行所　株式会社　岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電話案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・大日本印刷　カバー印刷・NPC　製本・松岳社

ISBN 978-4-00-005956-5　Printed in Japan